泰山科技学院
Taishan College of Science and Technology

《高等数学 A 上册》教　　案

课程学时：64 学时

课程性质：必修

授课对象：本

授课教师：杨东璇

开课单位：数理教学部

《高等数学A上册》教　案

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第6周</td><td>课次</td><td colspan="2">第1次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">授课题目（教学章、节或主题）： 第一章 函数与极限
第一节 映射与函数</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）理解映射、函数的基本概念；
（2）理解函数的概念，能够求解函数的定义域、判断两个函数是否为同一函数；
（3）掌握函数四种性质（单调性、奇偶性、有界性和周期性）的分析与判断；
（4）理解反函数和复合函数的概念；
（5）掌握基本初等函数的概念，熟练掌握基本初等函数的图形和主要性质；
（6）理解初等函数的概念；
（7）理解分段函数的概念，能够画一些简单分段函数的图形。
思政育人目标：
通过比较中学数学与大学数学的区别，了解数学，体会数学的“无处不在”以及科学性和严谨性；帮助学生形成良好的学习习惯，体会数学中对立统一的辩证思想，从有限认识无限，理解有限与无限，将空间图形联系到实际生活，体会数学的辩证统一。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学重点及难点：
教学重点：函数的概念和四种性质
教学难点：反函数、复合函数、基本初等函数、分段函数的作图
应对策略：为准确而深刻的理解函数的概念，集合与映射的知识是必不可少的，本节将简要复习回顾集合、映射的一些基本概念，在此基础上引出函数的概念。</td></tr>
<tr><td colspan="6">作业、讨论题、思考题：
作业　　习题1-1　T2（1）（2）；T4 ；　T7（4）（6）
讨论题　（1）什么是函数？
（2）函数在我们的日常生活中有什么用途？
思考题　习题1-1　T1（1）（4）（8）；</td></tr>
</table>

课后小结： ■【教师】简要总结本节课的要点 本节课学习了区间和邻域、函数的概念、函数的几种特性、反函数与复合函数、初等函数的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。 ■【学生】总结回顾知识点 以学生为主体，通过练习的方式，对应于映射的概念，尝试写出函数的概念。 ■教学反思 本节课的教学效果整体不错，大部分学生都能很好地掌握并运用所学知识，只是有小部分学生在课堂测验时出现了一些错误。在课堂上有针对性地对一些典型错误进行了讲解，并引导学生对所犯的错误进行了认识和反思，防止其以后再犯同类错误。
下节课预习重点： 数列极限
参考文献： 【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023. 【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005. 【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

课时分配	教学内容	方法及手段
知识讲解 **35M**	（见下）	学习区间和邻域、函数的概念、函数的几种特性、反函数与复合函数。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

【教师】讲解映射、函数的概念

1.映射的概念

设 X,Y **是两个非空集合，如果存在一个法则** f ,使得对 X 中的每一个元素 x ，按照法则 f ，在 Y 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，那么称 f 为从 X 到 Y 的映射记作 $f:X\to Y$

2.逆映射、复合映射的概念

3.函数的概念

定义：设数集 $D\subset R$ ，则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数　　记为　$y=f(x),x\in D$

自变量、因变量、定义域、值域、函数值用 f 、 g 、 φ

函数相等：定义域、对应法则相等

自然定义函数；单值函数；多值函数、单值分枝.

案例 1　移动公司规定的短信收费标准为：当月所发短信不超过 500 条的，只收月租费 25 元；超过 500 条的，每条加收 0.1 元，则短信费用和用户当月所发短信条数的关系可表示为

$$y=\begin{cases}25, & x\le 500,\\ 25+0.1(x-500), & x>500.\end{cases}$$

案例 2　去银行存钱，假设一年期整存整取的年利率为 2.25%，则存款金额 x 与一年到期时的利息 y 之间的对应关系如表 1-1 所示.

表 1-1

存款金额 x/元	500	1 000	2 000	5 000	10 000	20 000
一年到期时利息 y/元	11.25	22.5	45	112.5	225	450

案例 3　某地气温 T 与时间 t 的关系如图 1-1 所示.

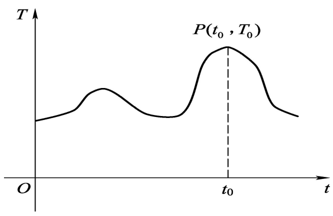


图 1-1

以上列举的案例，有一个共性：在同一过程中有着两个相互依赖的变量，当其中一个量在某数集内取值时，按一定的规则，另一个量有唯一确定的值与之对应．变量之间的这种关系就是函数关系．

定义 1　设数集 $D\subset\mathbf{R}$，变量 $x\in D$，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时，变量 $y\in\mathbf{R}$ 依照某一对应法则 f 总有唯一确定的数值与之对应，则称 f 为 D 到 $\mathbf{R}$ 的函数，通常记作 $f:D\to\mathbf{R}$，或 $y=f(x)$，$x\in D$．

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域，因变量 y 的取值集合称为函数的值域．

例 1　求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{3}{5x^2+2x}$；

（2）$y=\sqrt{9-x^2}$；

（3）$y=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$．

解（1）在分式中分母不能为零，所以 $5x^2+2x\neq 0$，解得 $x\neq -\dfrac{2}{5}$ 且 $x\neq 0$，即定义域为 $\left(-\infty,-\dfrac{2}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty)$．

（2）在偶次根式中，被开方式必须大于等于零，所以有 $9-x^2$ 开 0，解得 -3 • x • 3，即定义域为 $[-3,3]$．

（3）在对数式中，真数必须大于零，所以 $x-1>0$，即 $x>1$．又因分式中分母不能为零，所以 $\ln(x-1)\neq 0$，即 $x-1\neq 1$，即 $x\neq 2$．综合起来得出所求函数的定义域为 $(1,2)\cup(2,+\infty)$．

【学生】理解函数的概念，能够计算函数的定义域、判断两个函数是否为同一函数

【教师】讲解函数的几种特性，并通过例题讲解介绍其应用

1．奇偶性

一般地，设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数．

例 2　判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性．

解　函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的定义域为全体实数 $\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

故 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数．

2．单调性

一般地，设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内**单调增加**；如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内**单调减少**．

单调增加函数与单调减少函数统称为**单调函数**，若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调函数，则称 (a,b) 是该函数的单调区间．

3．周期性

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 T，使 $f(T+x)=f(x)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 为**周期函数**，称 T 是它的一个周期．

若 T 是函数的一个周期，则 $\pm 2T$，$\pm 3T$，$\cdots$ 也都是它的周期．对周期函数 $y=f(x)$，若在它所有的周期中存在一个最小正数，则称之为**最小正周期**．通常所称的周期均指的是最小正周期．例如，正弦函数 $y=\sin x$ 是周期为 2π 的周期函数．周期为 T 的周期函数，在长度为 T 的各个区间上，其函数的图像有相同的形状．例如，对正弦函数 $y=\sin x$，在长度为 2π 的各个区间上，其图像的形状显然是相同的．

4．有界性

一般地，设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in D$，恒有 $|f(x)| \bullet M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**有界函数**．如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 上是**无界函数**．

【学生】掌握函数四种性质（单调性、奇偶性、有界性和周期性）的分析与判断

【教师】讲解反函数与复合函数，并通过例题讲解介绍其应用

1．反函数

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 的值域是 M，若对于 M 中的每一个 y 值，存在唯一确定的 x 值（满足 $y=f(x)$）与之对应，则得到了一个定义在 M 上的以 y 为自变量 x 为因变量的新函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，称其为 $y=f(x)$ 的**反函数**．

例 2　求函数 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数．

解　将 x 解出来得到 $x=y^3-1$，函数 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的值域为 $\mathbf{R}$，故其反函数为

$$y=x^3-1，\quad x\in\mathbf{R}．$$

2．复合函数

一般地，设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$．如果 $u=\varphi(x)$ 的值域或其部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域中，则 y 通过 u 构成 x 的函数，称为 x 的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$．其中，x 是自变量，u 称为中间变量．

例 3　指出下列复合函数由哪些简单函数复合而成：

（1）$y=\sin(x^3+4)$；　　　　（2）$y=5^{\cot\frac{1}{x}}$．

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
课堂测验 10M	【学生】理解反函数和复合函数 【教师】出几道测试题目，测试 【学生】做测试题目 【教师】公布题目正确答案，并 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧 【教师】讲解常用函数，并通过例题讲解介绍其应用 1．基本初等函数 （1）常数函数 $y=C$（C 为常数），它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，其图像如图 1-3 所示． 图 1-3 （2）幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数），它的定义域随 α 而异．例如，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{3}}$，$y=x^{\frac{1}{3}}$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$；$y=x^{\frac{1}{2}}$，定义域为 $[0,+\infty)$；$y=x^{-1}$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；$y=x^{-\frac{1}{2}}$，定义域为 $(0,+\infty)$ 等．当 $\alpha>0$ 时，函数的图像通过原点 $(0,0)$ 和点……增加，如图 1-4 所示．当 $\alpha<0$ 时，函数的图像不过原点……在 $(0,+\infty)$ 内单调减少，如图 1-5 所示．当 α 为奇数时……；当 α 为偶数时，函数 $y=x^{\alpha}$ 是偶函数．	

解（1）设 $u=x^3+4$，则 $y=\sin(x^3+4)$ 由 $y=\sin u$，$u=x^3+4$ 复合而成．

（2）设 $u=\cot\frac{1}{x}$，则 $y=5^u$；设 $v=\frac{1}{x}$，则 $u=\cot v$．所以，$y=5^{\cot\frac{1}{x}}$ 可以看成是由 $y=5^u$，$u=\cot v$，……．

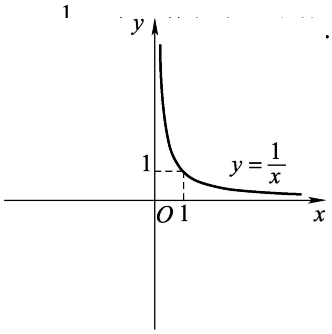


图 1-5

（3）指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$，它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，函数的图像全部在 x 轴上方，且通过点 $(0,1)$．当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少，如图 1-6 所示．

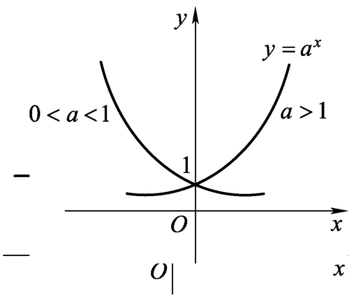


图 1-6

（4）对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$，它的定义域是 $(0,+\infty)$，函数的图像全部在 y 轴右侧，值域是 $(-\infty,+\infty)$．无论 a 取何值，曲线都通过点 $(1,0)$，如图 1-7 所示．当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少．

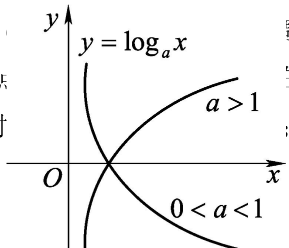


图 1-7

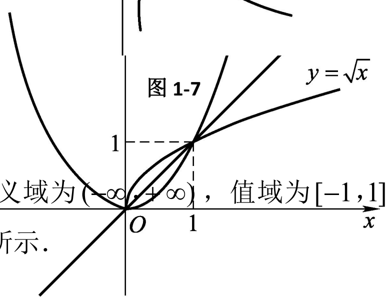


图 1-4

（5）三角函数．

正弦函数 $y=\sin x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，奇函数，以 2π 为周期，有界，如图 1-8 所示．

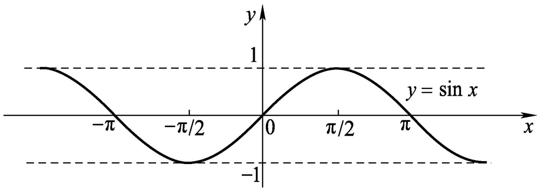


图 1-8

余弦函数 $y=\cos x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，偶函数，以 2π 为周期，有界，如图 1-9 所示.

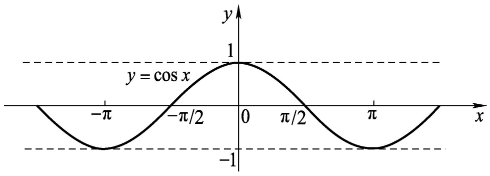


图 1-9

正切函数 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，奇函数，以 π 为周期，在每一个连续区间内单调增加，以直线 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为渐近线，如图 1-10 所示.

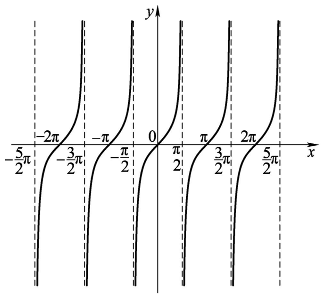


图 1-10

余切函数 $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，定义域为 $x\neq k\pi\,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，奇函数，以 π 为周期，在每一个连续区间内单调减少，以直线 $x=k\pi\,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为渐近线，如图 1-11 所示.

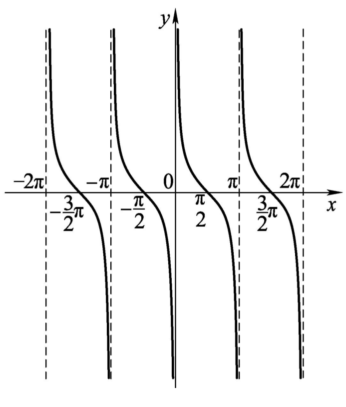


图 1-11

（6）反三角函数.

反正弦函数 $y=\arcsin x$，定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，单调增加的奇函数，有界，如图 1-12 所示.

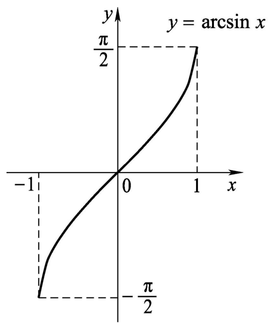


图 1-12

反余弦函数 $y=\arccos x$，定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，单调减少函数，有界，如图 1-13 所示.

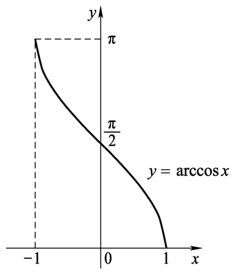


图 1-13

反正切函数 $y=\arctan x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，单调增加的奇函数，有界，如图 1-14 所示.

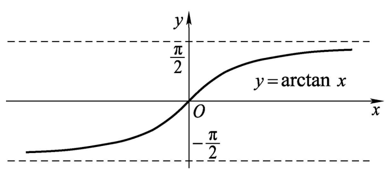


图 1-14

反余切函数 $y=\operatorname{arc}\cot x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$，单调减少函数，有界，如图 1-15 所示.

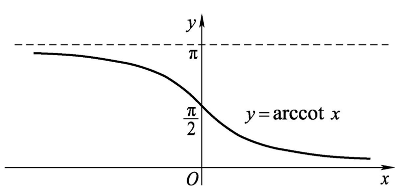


图 1-15

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合并且能用一个解析式表示的函数称为**初等函数**．例如，$y=\arctan\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$，$y=\sqrt[5]{\ln\cos^3 x}$，$y=\mathrm{e}^{\operatorname{arccot}\frac{x}{3}}$ 都是初等函数.

3. 分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量 x 不同的取值，不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为**分段函数**．分段函数是用若干个表达式表示的一个函数，其定义域是各个取值区间的并集．例如，绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，其图像如图 1-16 所示．再如，取整函数 $y=[x]$，表示不超过 x 的最大整数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\mathbf{Z}$，如 $[\pi]=3$，$[-6.8]=-7$，$\left[\dfrac{2}{3}\right]=0$．取整函数的图像如图 1-17 所示.

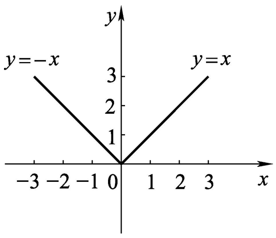


图 1-16

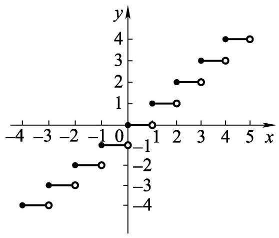


图 1-17

例 4 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -4\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<3,\\ 5x-1, & x\geqslant 3,\end{cases}$$

求 $f(-\pi)$，$f(1)$，$f(3.5)$ 及函数的定义域.

解 因为 $-\pi\in[-4,1)$，所以 $f(-\pi)=\sin(-\pi)=0$；

因为 $1\in[1,3)$，所以 $f(1)=1$；

因为 $3.5\in[3,+\infty)$，所以 $f(3.5)=5\times3.5-1=16.5$；

函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,+\infty)$．

课堂小结

5M

【教师】简要总结本节课的要点

本节课学习了区间和邻域、函数的概念、函数的几种特性、反函数与复合函数、初等函数的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

【学生】总结回顾知识点

授课时间	第 6 周	课次	第 2 次课
授课方式（请打√）	理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□	课时安排	2

授课题目（教学章、节或主题）： 第一章 函数与极限
第二节 数列的极限
第三节 函数的极限

教学目的与要求：

知识技能目标：

（1）理解数列的极限；

（2）掌握收敛数列的性质；

（3）理解函数的极限，会求函数的极限，包括函数在某点的左极限、右极限；

（4）理解函数极限的性质。

思政育人目标：

通过一些古诗、歌曲、绘画等形象的案例去感受“极限”，让学生充分感觉到我国深厚的文化底蕴，激发学生的爱国情怀；深刻理解数列极限定义，认知有限和无限的本质区别，隐喻滴水穿石，愚公移山的精神，调动学生学习兴趣。引导学生运用所学知识揭示生活中的奥秘，在实践中深化认识，达到学以致用的目的不如坚定的走下去，寻找“直挂云帆济沧海”的成功。

教学重点及难点：

教学重点：数列极限的定义、收敛数列的性质

教学难点：数列极限的证明、计算函数的极限、左极限和右极限

应对策略：通过一些古诗、歌曲、绘画等形象的案例去感受“极限”，如: 李白的古诗《黄鹤楼送孟浩然之广陵》中的第三句话“孤帆远影碧空尽，唯见长江天际流。”形象地描述了小船无限的变化过程。 在讲授极限概念时通过庄子的“截杖问题”和刘徽的“割圆术”，引出并讲解数列以及数列的极限。

作业、讨论题、思考题：

习题 1-2 T1（1）（2）（3）（5）

习题 1-3 T1 T2（1）（3）（5）

课后小结：

■【教师】简要总结本节课的要点

本节课学习了数列极限的定义、收敛数列的性质、函数极限的概念、函数极限的性质的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

■【学生】总结回顾知识点

以学生为主体，通过练习的方式，。

■ 教学反思

本节课讲授了数列的极限及函数的极限，是本章节的重要内容，为后面的求极限打基础，首先回顾数列的极限，随后引出函数的概念，并于数列的极限概念作比较，让学生自主的发现问题，分析问题，最后采用具体例子让学生理解函数极限和左右极限的含义和关系。

下节课预习重点：

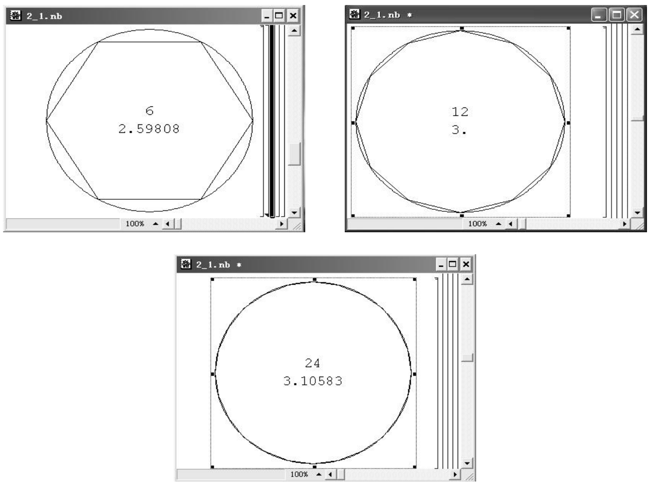
无穷小与无穷大、极限的运算法则

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **35M**	**【教师】通过庄子的“截杖问题”和刘徽的“割圆术”，引出并讲解数列以及数列的极限** 案例 1　“一尺之棰，日取其半，万世不竭”． 分析　这是战国时期哲学家庄周所著的《庄子 • 天下篇》中的一句话，意思是“一根长为一尺的木棒，每天截去一半，永远取不尽”．我们把每天取后剩下的部分用算式表示可得数列： $$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots.$$ 随着时间的推移，剩下的木棒长度越来越短，显然，当天数 n 无限增大时，剩下的木棒长度将无限缩短，即剩下的木棒长度 $\frac{1}{2^n}$ 越来越接近于数 0. 案例 2　刘徽称“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可割，则与圆周合体而无所失亦”． 分析　“割圆术”求圆面积的作法和思路是：先作圆的内接正六边形，把它的面积记为 A_1；再作圆的内接正十二边形，其面积记为 A_2；再作圆的内接正二十四边形，其面积记为 A_3；照此下去，把圆内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n，这样得到一个数列：A_1，A_2，A_3，…，A_n，如图 1-18 所示．  **图 1-18** 由图 1-18 可以看出，随着圆内接正多边形的边数无限增加，圆内接正多边形的面积与圆的面积越来越接近．当边数 n 无限增大时，圆内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积 A_n 会无限接近圆的面积 A．	通过数学史和数学文化的记载，提出极限思想，让学生充分感觉到我国深厚的文化底蕴，激发学生的爱国情怀。学习数列极限的定义和收敛数列的性质。 边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

对于一些数列，如$\left\{\frac{1}{n}\right\},\left\{\frac{n+1}{n}\right\},\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$，若当 n 无限增加时，一般项无限接近于某一个常数，则这个常数称为数列的极限．在数学上，需要从定量角度定义数列的极限．

给定一个数列$\{a_n\}$和常数 a，为证明$\{a_n\}$的极限为 a，需要证明 n 越来越大时，$|a_n-a|$越来越趋于 0．为了定量描述随 n 增大$|a_n-a|$逐渐接近于 0，$\{a_n\}$与 a 的接近程度可用$|a_n-a|<\varepsilon$（ε为任意小的正数）代替．ε越小，$\{a_n\}$越接近于 a，满足$|a_n-a|<\varepsilon$成立的a_n的项数 n 越大．因此，给定一个正数ε，就存在一个正整数$N\in\mathbf{Z}^+$，当$n>N$时，$|a_n-a|<\varepsilon$，ε越小，N 就越大，如图 1-19 所示．

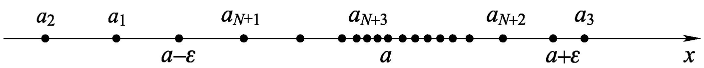


图 1-19

定义 1 设$\{a_n\}$是数列，a 为常数，若对任意给定的正数ε，总可以找到正整数 N，使得所有满足$n>N$的自然数 n，都有$|a_n-a|<\varepsilon$成立，则称数列$\{a_n\}$收敛于 a，a 称为数列$\{a_n\}$的**极限**，记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$．

例 1 对数列$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$，当取$\varepsilon_1=0.1$，$\varepsilon_2=0.01$，求满足$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon_1$，$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon_2$的 n 的范围，并证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$．

解 因为$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$，所以要使$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon_1=0.1$，只要$\frac{1}{n}<0.1$，即$n>10$即可．同理，要满足$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon_2=0.01,$，只要$n>100$即可．

现证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$．

对任意给定的$\varepsilon>0$，要使$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$，只要$n>\frac{1}{\varepsilon}$，因此，可以取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$（$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$可能为 0）．当$n>N$时，就有$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$．

如果数列 $\{a_n\}$ 没有极限，则称该数列发散．我们还可以用数列极限的定义证明如下重要极限：

$\lim\limits_{n\to\infty} C = C$ （C 为常数），$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0\,(|a|<1)$，$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1\,(a>0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$．

【学生】理解数列及数列的极限

【教师】讲解收敛数列的性质

定理 1（极限的唯一性）　如果数列 $\{a_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一．

证明　用反证法．假设同时有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$，且 $a<b$，取 $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$．

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，故 $\exists$ 正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，不等式

$$|a_n - a| < \frac{b-a}{2} \qquad （1）$$

也成立．取 $N=\max\{N_1, N_2\}$（表示 N 是 N_1 和 N_2 中较大的那个数），则当 $n>N$ 时，（1）式及（2）式同时成立．但由（1）式有 $a_n < \frac{a+b}{2}$，由（2）式有 $a_n > \frac{a+b}{2}$，这是矛盾的，故假设不成立．

定义 2　对于数列 $\{a_n\}$，如果存在正数 M，使得对于一切 a_n 都满足不等式 $|a_n| \bullet M$，则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的；否则称数列 $\{a_n\}$ 是无界的．

定理 2（收敛数列的有界性）　如果数列 $\{a_n\}$ 收敛，那么数列 $\{a_n\}$ 一定有界．

证明　设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，根据数列极限的定义，对于 $\varepsilon=1$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n - a|<1$ 成立．于是，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n| = |a_n - a + a| \bullet |a_n - a| + |a| < 1 + |a|\,.$$

取 $M=\max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, 1+|a_n|\}$，则数列 $\{a_n\}$ 中的一切 a_n 都满足不等式 $|a_n| \bullet M$．这就证明了数列 $\{a_n\}$ 是有界的．

定理 3（收敛数列的保号性）　如果数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，且 $a>0$（或 $a<0$），那么存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $a_n>0$（或 $a_n<0$）．

当 $a>0$ 时，根据极限定义，只要取 $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$，即可证明结论．

推论　如果数列 $\{a_n\}$ 从某项起有 a_n 开0（或 $a_n \bullet 0$），且数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，则 a 开0（或 $a \bullet 0$）．

问题讨论

10M

证明　就 $a_n \geq 0$ 情形证明．设数列 $\{a_n\}$ 从 N_1 项起，即当 $n > N_1$ 时有 $a_n \geq 0$．现在用反证法证明，若 $a < 0$，则由定理 3 知，$\exists N_2 \in \mathbf{Z}^+$，当 $n > N_2$ 时，有 $a_n < 0$，取 $N = \max(N_1, N_2)$，则当 $n > N$ 时，有 $a_n \geq 0$ 与 $a_n < 0$ 同时成立，矛盾，所以 $a \geq 0$．

对于 $a_n \leq 0$ 的情形，可以类似地证明．

定义 3　在数列 $\{a_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列 $\{a_n\}$ 中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列 $\{a_n\}$ 的子数列（或子列）．

设在数列 $\{a_n\}$ 中，第一次抽取 a_{n_1}，第二次在 a_{n_1} 后抽取 a_{n_2}，第三次在 a_{n_2} 后抽取 a_{n_3}，…，这样无休止的抽取下去，得到一个数列

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ \cdots,\ a_{n_k},\ \cdots,$$

这个数列 $\{a_{n_k}\}$ 就是数列 $\{a_n\}$ 的一个子数列．

【学生】掌握收敛数列的性质

【教师】组织学生讨论以下问题

1．若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，能否得到结论：对任意给定的正数 ε，总可以找到正整数 N，使得所有满足 $n > N$ 的自然数 n，都有 $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$（或 ε^2）成立？

2．在数列极限定义的 $\varepsilon - N$ 语言中对任意给定的正数 ε，可否规定 $0 < \varepsilon < 1$？

3．有界数列是否一定收敛？发散的数列是否一定无界？

4．如果数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，且 $\forall n \in \mathbf{N}$，有 $a_n > 0$（或 $a_n < 0$），则是否一定有 $a > 0$（或 $a < 0$）？

5．若数列的任何子数列都收敛，那么此数列是否一定收敛？发散数列的子数列都发散吗？

【学生】发言

<table>
<tr><th>课时分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及手段</th></tr>
<tr><td>知识讲解
30M</td><td>

【教师】讲解函数极限的概念，并通过例题讲解介绍其应用

1．自变量趋于无穷时函数的极限

当 $x \to +\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限定义与数列极限定义相似，因此可以给出当 $x \to +\infty$ 时，$f(x)$ 极限的 $\varepsilon - M$ 定义.

定义 1　设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上有定义，A 为实常数，若对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists M > 0\,(M > |a|)$，当 $x > M$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于 $+\infty$ 时，以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A\ (x \to +\infty)\ .$$

定义 1′　设 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上有定义，A 为实常数，若对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists M > 0\,(-M < a)$，当 $x < -M$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时，以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A\ (x \to -\infty)\ .$$

定义 1″　设 $f(x)$ 在 $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ 上有定义，A 为实常数，若对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists M > 0\quad (M > |a|)$，当 $|x| > M$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$，则称函数 $y = f(x)$ 在 $x \to \infty$ 时，以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A\ .$$

定理 1　$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

证明　必要性显然．下证充分性.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 时，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists M_1 > 0$，使当 $x > M_1$ 时 $|f(x) - A| < \varepsilon$；$\exists M_2 > 0$，使当 $x < -M_2$ 时 $|f(x) - A| < \varepsilon$．取 $M = \max\{M_1, M_2\}$，则当 $x > M$ 或 $x < -M$，即 $|x| > M$ 时，同时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

例 1　求 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

解　考察函数 $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$，如图 1-21 所示.

</td><td>通过数学史和数学文化的记载，提出极限思想，让学生充分感觉到我国深厚的文化底蕴，激发学生的爱国情怀。学习数列极限的定义和收敛数列的性质。
边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

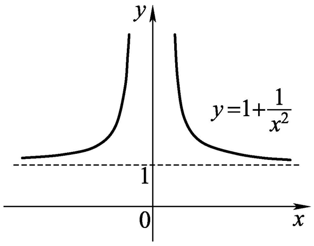


图 1-21

当 $x \to +\infty$ 时，函数 $1+\frac{1}{x^2}$ 无限趋于常数 1；当 $x \to -\infty$ 时，函数 $1+\frac{1}{x^2}$ 同样无限趋于 1，所以

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1 .$$

例 2　考察函数 $f(x)=\arctan x$ 当 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 时的极限，并说明它在 $x \to \infty$ 时的极限是否存在.

解　如图 1-22 所示，当 $x \to +\infty$ 时，函数 $f(x)=\arctan x$ 无限趋于常数 $\frac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x=\frac{\pi}{2}$.

当 $x \to -\infty$ 时，函数 $f(x)=\arctan x$ 无限趋于常数 $-\frac{\pi}{2}$，所以

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x=-\frac{\pi}{2} .$$

由于 $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x \neq \lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x$ ，所以 $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x$ 不存在.

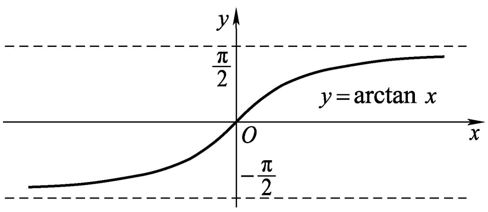


图 1-22

2．自变量趋于有限值时函数的极限

对于函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$， $f(x)$ 在 $x=1$ 无意义．当 $x\neq1$ 时， $f(x)=x+1$，如图 1-23 和表 1-2 所示，当 $x\to1$ 时， $f(x)\to2$．这样对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-2|=|x-1|<\varepsilon$，定有 $|x-1|$ 在确定的范围内，即 $\delta=\varepsilon>0$，$0<|x-1|<\delta$．ε 越小，δ 越小，δ 由 ε 确定．这样我们可以得到，当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义．

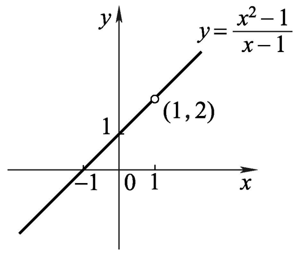


图 1-23

表 1-2

x	...	0.9	0.99	0.999	...	1	...	1.001	1.01	1.1	...
y	...	1.9	1.99	1.999	...	2	...	2.001	2.01	2.1	...

定义 2　设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta_1)$ 上有定义，A 为实常数，若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0\ (\delta<\delta_1)$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时，以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0)\ .$$

定义 2′　设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心右邻域 $\overset{\circ}{U}_+(x_0,\delta_1)$ 上有定义．A 为一实常数，若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0\ (\delta<\delta_1)$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\delta$，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 x 趋于 x_0^+ 时的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0^+)\ .$$

定义 2″　设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心左邻域 $\overset{\circ}{U}_-(x_0,\delta_1)$ 上有定义，A 为一实常数，若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0\ (\delta<\delta_1)$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\delta$，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 x 趋于 x_0^- 时的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0^-)\ .$$

定理 2　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$．证明与定理 1 类似．

例 3　设 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x \geq 1, \\ 3x, & x<1, \end{cases}$ 试判断 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 是否存在.

解　先分别求 $f(x)$ 当 $x\to1$ 时的左、右极限，

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-} 3x=3，\quad \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(x+2)=3，$$

因为左、右极限各自存在且相等，所以 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=3$.

【学生】理解函数的极限，会计算函数的极限，包括函数在某点的左极限、右极限

【教师】讲解函数极限的性质

定理 3（极限的唯一性）　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是唯一的.

定理 4（局部有界性）　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ ，则存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$ ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|<M$.

局部有界性是指函数在 x_0 的去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 内有界.

定理 5（局部保号性）　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ ，如果 $A>0$（或 $A<0$），则 $\exists\delta>0$ ，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时， $f(x)>0$ （或 $f(x)<0$ ）.

推论　如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geq0$（或 $f(x)\leq0$），且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ ，则 $A\geq0$ （或 $A\leq0$ ）.

【学生】理解函数极限的性质

【教师】组织学生讨论以下问题

问题讨论 10M

1．从函数极限定义的角度考虑，若令 $f(n)=a_n$ ，数列极限还可以怎样叙述？

2．若对 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ ， $f(x)>0$ ，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ ，是否一定有 $A>0$ ？

【学生】讨论、发言

课堂小结 5M

【教师】简要总结本节课的要点

本节课学习了数列极限的定义、收敛数列的性质、函数极限的概念、函数极限的性质的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

【学生】总结回顾知识点

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 6 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 3 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
</table>

授课题目（教学章、节或主题）： 第一章 函数与极限

第四节 无穷小与无穷大

第五节 极限运算法则

教学目的与要求：

知识技能目标：

（1）掌握无穷小量、无穷大量的概念；

（2）理解无穷小与函数极限的关系、无穷大与无穷小的关系；

（3）能够判断无穷小量和无穷大量；

（4）能够运用极限的四则运算法则求极限；

（5）理解复合函数的极限运算法则。

思政育人目标：

通过学习无穷小量与无穷大量、无穷小的运算，体会团结的力量；不积跬步无以至千里，不积小流无以成江河；勿以恶小而为之，勿以善小而不为。

教学重点及难点：

教学重点：无穷小量、无穷大量的概念、极限的四则运算法则

教学难点：无穷小量和无穷大量的判断、运用极限的四则运算法则求极限

应对策略：通过举例说明无穷小并不是一个很小的数，无穷大并不是很大的数引出无穷小与无穷大的概念，类比实数的四则运算法则学习极限的四则运算法则。

作业、讨论题、思考题：

习题 1-4　T1　T2（2）T5

习题 1-5　T1　（1）（4）（7）（9）

课后小结：

■ **【教师】简要总结本节课的要点**

本节课学习了无穷小量、无穷大量、极限的四则运算法则、复合函数的极限运算法则的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

■ **【学生】总结回顾知识点**

■ **教学反思**

本节课效果不错，学生积极提问，并主动与老师交流。我在课堂教学中认识到，只有主动与学生共同探讨学习中的问题，并以交流、合作、商讨的口气与学生交流心

得、体会，才能使学生“亲其师，信其道”，遇到什么问题都愿意与老师讲，寻求老师的帮助。

下节课预习重点：

极限存在准则、两个重要极限、无穷小的比较

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

<table>
<tr><th>课时分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及手段</th></tr>
<tr><td>知识讲解

30M</td><td>

【教师】讲解无穷小量的相关知识，并通过例题讲解介绍其应用

1．无穷小量的概念

定义 1　在自变量的某一变化过程中，以 0 为极限的函数称为无穷小量，简称无穷小，常用α，β，γ等表示.

例如，当$x\to\infty$时，$\frac{1}{x}$是无穷小量；当$x\to 1$时，x^2-1是无穷小量；当$x\to\frac{\pi}{2}$时，$\cos x$是无穷小量.

例 1　下列变量在自变量怎样的变化过程中为无穷小量：

（1）$\frac{1}{x-1}$；（2）$2x-4$；（3）2^x；（4）$\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

解（1）因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0$，所以当$x\to\infty$时，$\frac{1}{x-1}$为无穷小量.

（2）因为$\lim\limits_{x\to 2}(2x-4)=0$，所以当$x\to 2$时，$2x-4$为无穷小量.

（3）因为$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$，所以当$x\to-\infty$时，$2^x$为无穷小量.

（4）因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x=0$，所以当$x\to+\infty$时，$\left(\frac{1}{4}\right)^x$为无穷小量.

2．无穷小与函数极限的关系

定理 1　在自变量的同一变化过程中，函数$f(x)$以常数 A 为极限的充要条件是$f(x)$可以表示为常数 A 与一个无穷小量α之和，即

$$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha .$$

3．无穷小量的性质

性质 1　有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

性质 2　有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

性质 3　有界变量与无穷小量的乘积仍是无穷小量.

推论　常数与无穷小量的乘积仍是无穷小量.

例 2　求$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$.

</td><td>学习无穷小量的概念、无穷小与函数极限的关系、无穷小量的性质，无穷大量的概念、无穷大与无穷小的关系。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

课堂测验 15M	解　因为$\left\|\sin\frac{1}{x}\right\|\leqslant 1$，当$x\to 0$时，$x^2$是无穷小量．根据无穷小量的性质3，当$x\to 0$时，$x^2\sin\frac{1}{x}$是无穷小量，即 $$\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0 .$$ **【学生】掌握无穷小量的概念和性质，理解无穷小与函数极限的关系** **【教师】讲解无穷大量的相关知识，并通过例题讲解介绍其应用** 1．无穷大量的概念 定义2　在自变量的某个变化过程中，绝对值无限增大的函数称为无穷大量，简称无穷大，记作$\lim f(x)=\infty$． 例如，当$x\to 1$时，$\left\|\frac{1}{x-1}\right\|$无限增大，所以当$x\to 1$时，$\frac{1}{x-1}$是无穷大，即$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$． 2．无穷大与无穷小的关系 定理2　在同一变化过程中，无穷大量的倒数必是无穷小量；非零无穷小量的倒数必是无穷大量． 例如，当$x\to\infty$时，$x-1$是无穷大量，则$\frac{1}{x-1}$是无穷小量；当$x\to 0$时，$\tan x$是无穷小量，则$\frac{1}{\tan x}=\cot x$是无穷大量． 例3　下列变量在自变量怎样的变化过程中为无穷大量： （1）$\ln x$；　　（2）2^x． 解　（1）因为$x\to+\infty$时，$\ln x\to+\infty$，即$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$；$x\to 0^+$时，$\ln x\to-\infty$，即$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，所以$x\to+\infty$及$x\to 0^+$时，$\ln x$都是无穷大量． （2）因为$x\to+\infty$时，$2^x\to+\infty$，即$\lim_{x\to+\infty}2^x=+\infty$，所以$x\to+\infty$时，$2^x$是无穷大量． **【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况** **【学生】做测试题目** **【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程** **【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧**	

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **25M**	**【教师】讲解极限的四则运算法则，并通过例题讲解介绍其应用** 定理 1　若 $\lim u(x)=A$， $\lim v(x)=B$，则： （1） $\lim[u(x)\pm v(x)]=\lim u(x)\pm\lim v(x)=A\pm B$； （2） $\lim[u(x)\cdot v(x)]=\lim u(x)\cdot\lim v(x)=A\cdot B$； （3） $\lim\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{\lim u(x)}{\lim v(x)}=\dfrac{A}{B}\,(B\neq 0)$． 推论　设 $\lim u(x)$ 存在，c 为常数，n 为正整数，则有： （1） $\lim[c\cdot u(x)]=c\cdot\lim u(x)$； （2） $\lim[u(x)]^n=[\lim u(x)]^n$． 定理 2　设有数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$， $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则 （1） $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$； （2） $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=ab$； （3） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a}{b}\,(b\neq 0)$． 例 1　求 $\lim\limits_{x\to-1}(x^2-2x+5)$． 解 $\lim\limits_{x\to-1}(x^2-2x+5)=\lim\limits_{x\to-1}x^2-\lim\limits_{x\to-1}2x+\lim\limits_{x\to-1}5=(\lim\limits_{x\to-1}x)^2-2\lim\limits_{x\to-1}x+5$ $=(-1)^2-2\times(-1)+5=8$． 结论　一般地，多项式函数在 x_0 处的极限就等于该函数在 x_0 处的函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x_0+a_n$ 例 2　求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x}{3x^2+2x+1}$． 解　这里分母的极限不为零，故 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x}{3x^2+2x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}2x}{\lim\limits_{x\to1}(3x^2+2x+1)}=\dfrac{2\lim\limits_{x\to1}x}{3\lim\limits_{x\to1}x^2+2\lim\limits_{x\to1}x+1}=\dfrac{2}{3+2+1}=\dfrac{1}{3}$． 结论　一般地，当有理分式函数中分母的极限不为零时，有理分式在 x_0 处的极限也等于其在 x_0 处的函数值．	学习极限的四则运算法则、复合函数的极限运算法则边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

例 3 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-3}{x^2-3x+2}$.

解 因为分母的极限 $\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+2)=1^2-3\times1+2=0$，故不能直接用商的极限法则；而分子的极限 $\lim\limits_{x\to1}(4x-3)=4-3=1\neq0$，可考虑倒数的极限.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{4x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+2)}{\lim\limits_{x\to1}(4x-3)}=\frac{0}{4-3}=0\ .$$

由无穷小量与无穷大量的倒数关系，得

例 4 求 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$.

解 因为分母的极限 $\lim\limits_{x\to3}(x^2-9)=0$，故不能直接用商的极限法则；而分子的极限 $\lim\limits_{x\to3}(x^2-4x+3)=0$，因此可先因式分解，消去公因式，再求极限.

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-1)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x-1}{x+3}=\frac{1}{3}\ .$$

结论 一般地，在求分子、分母的极限均为零的有理分式函数的极限时，先对分子、分母因式分解，约去趋向于零的公因式，然后再求极限.

例 5 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

解 因为当 $x\to1$ 时，分子、分母的极限均为零，但它与上题不同，需借助于根式有理化，从而约去趋向于零的公因式 $x-1$（称为零因子）.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}\ .\end{aligned}$$

结论 一般地，在求分子、分母的极限均为零的非有理分式函数的极限时，若分子或分母中含有根式，可先对根式有理化，约去零因子，然后再求极限.

例 6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^2+2x+2}$.

解 当 $x\to\infty$ 时，分子、分母都是无穷大，即极限不存在，故也不能直接用商的极限法则，但可以将分子、分母同除以它的最高次幂 x^2 使其分子分母中各项均有极限，再利用极限四则运算法则计算.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2+2x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{2-0+0}{1+0+0}=2$$

例 7　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{x^3-x+5}$.

解　将分子、分母同除以它的最高次幂 x^3，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{x^3-x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}=\frac{0+0}{1-0+0}=0 .$$

例 8　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x+5}{3x^2+2}$.

解　由例 7 结果及无穷小量与无穷大量的倒数关系可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x+5}{3x^2+2}=\infty .$$

例 9　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}}$.

解　当 $n\to\infty$ 时，分子、分母都是无穷大，故不能直接用商的极限法则，但可以将分子、分母同除以 5^n，再利用极限四则运算法则计算.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}{2\left(\frac{2}{5}\right)^n+5}=\frac{0+1}{0+5}=\frac{1}{5} .$$

例 10　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-n$.

解　本题可先根式有理化，然后利用例 9 方法求得.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2} .$$

例 11　求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}$ 和 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{x^2-1}$ 均不存在，所以不能直接用差的极限法则，可先通分化简，再求极限.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

	结论　一般地，在求两个有理分式差的极限时，若这两个有理分式都是无穷大量，可先将它们通分化简，再求极限. 【学生】掌握极限的四则运算法则 【教师】讲解复合函数的极限运算法则 定理 5　设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与 $y=f(u)$ 复合而成的，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta_0)$ 上有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(u)=A$，且当 $x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta_0)$ 时， $g(x)\neq u_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=A$. 例 12　求 $\lim\limits_{x\to 1}\sin\left(x^2+\frac{\pi}{2}x-1\right)$. 解　函数 $\sin\left(x^2+\frac{\pi}{2}x-1\right)$ 是由 $u=x^2+\frac{\pi}{2}x-1$ 与 $y=\sin u$ 复合而成的. 因为 $\lim\limits_{x\to 1}u=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+\frac{\pi}{2}x-1\right)=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{u\to\frac{\pi}{2}}\sin u=\sin\frac{\pi}{2}=1$，所以 $$\lim_{x\to 1}\sin\left(x^2+\frac{\pi}{2}x-1\right)=1.$$ 【教师】组织学生讨论以下问题	
问题讨论 5M	若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 存在，是否一定有 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在？ 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，是否一定有 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在？ 【学生】讨论、发言	
课堂测验 10M	【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况 【学生】做测试题目 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧	
课堂小结 5M	【教师】简要总结本节课的要点 本节课学习了无穷小量、无穷大量、极限的四则运算法则、复合函数的极限运算法则的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。 【学生】总结回顾知识点	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 7 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 4 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">授课题目（教学章、节或主题）： 第一章 函数与极限
第六节 极限存在准则 两个重要极限
第七节 无穷小的比较</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）掌握极限存在准则与两个重要极限；
（2）理解无穷小阶的比较。
思政育人目标：
通过学习极限存在准则与两个重要极限、无穷小阶的比较，培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；体会近朱者赤近墨者黑的含义，以及良师益友对一个人的影响。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学重点及难点：
教学重点：极限存在准则Ⅰ、极限存在准则Ⅱ
教学难点：利用两个重要极限公式求极限的方法
应对策略：若想用两个重要极限求其它未定式极限，关键是如何将未定式极限化成两个重要极限的形式。可以利用三角函数恒等式、三角函数之间的关系等等，将未定式化成所需要的形式。</td></tr>
<tr><td colspan="6">作业、讨论题、思考题：
习题 1-6 T1 （1）（3）（5）T2（1）（3）
习题 1-7 T1 T2</td></tr>
<tr><td colspan="6">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了极限存在准则与两个重要极限、无穷小阶的比较的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点
■教学反思
本节课发现部分学生缺乏练习，无法将所学知识很好地应用到题目中。在今后的教学中应更加注重课堂练习环节的作用，将其与平时成绩紧密结合，让学生自主参与，消除学生的惰性，培养学生良好的学习习惯。</td></tr>
</table>

下节课预习重点：

函数的连续性、闭区间上连续函数的性质

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

<table>
<tr><th>课时分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及手段</th></tr>
<tr><td>知识讲解

35M</td><td>

【教师】讲解准则 I 与第一个重要极限，并通过例题讲解介绍其应用

准则 I （夹逼准则） 设数列 $\{a_n\}$， $\{b_n\}$， $\{c_n\}$ 满足：

（1） $\exists N_0 \in \mathbf{Z}^+$, $n > N_0$ 时， $a_n \bullet c_n \bullet b_n$ ，

（2） $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ （ a 为常数），

则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

例 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)$.

解 对 $\forall n \in \mathbf{N}$ ，有

$$n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right) 开 n\cdot\frac{n}{n^2+n\pi}=\frac{n}{n+\pi},$$

$$n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right) \bullet n\cdot\frac{n}{n^2+\pi}=\frac{n^2}{n^2+\pi},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}}=1$ ， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}}=1$.

由夹逼准则可知

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$$

上述数列极限存在准则可以推广到函数的极限：

准则 I '（夹逼准则） 若函数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内满足：

（1） $g(x) \bullet f(x) \bullet h(x)$ ，

（2） $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$ ，

则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

作为准则 I 及准则 I '的应用，下面证明一个重要极限： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

</td><td>讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法
学习极限存在准则与两个重要极限。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

证明 在图 1-25 所示的单位圆中，设圆心角 $\angle BOA = x$， AD 切圆 O 于 A，且与 OB 延长线相交于 D，于是有

$$S_{\triangle AOB} < S_{扇形\triangle AOB} < S_{\triangle OAD},$$

即 $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$， $\sin x < x < \tan x$，不等式两边同时除以 $\sin x$ 得

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

不等式两边同时取倒数得

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 时， $-x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，有 $\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$，同样可得 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$．所以当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时， $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$．又因为 $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$， $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$，由判别准则 I 知 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$．

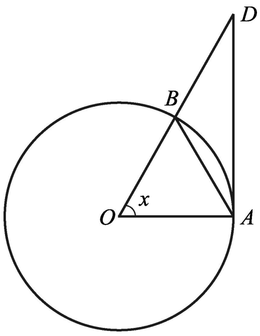


图 1-25

例 2 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$．

解 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1$．

例 3 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x}$．

解 设 $t = kx$，则当 $x \to 0$ 时， $t = kx \to 0$，于是

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{k \sin kx}{kx} = k \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = k \times 1 = k.$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin ax}{x}}{\dfrac{\sin bx}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin bx}{x}}=\dfrac{a}{b}$.

例 5　求 $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 2(x-\pi)}{x-\pi}$.

解　设 $t=x-\pi$，则 $x\to\pi$ 时，$t\to 0$，所以

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2(x-\pi)}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{t}=2.$$

【学生】掌握准则 I 与第一个重要极限

【教师】讲解准则II与第二个重要极限，并通过例题讲解介绍其应用

定义 1　如果数列 $\{a_n\}$ 满足 a_1 • a_2 • $\cdots$ • a_n • a_{n+1} • $\cdots$，则称数列是单调递增的；如果数列 $\{a_n\}$ 满足 a_1 幵 a_2 幵 $\cdots$ 幵 a_n 幵 a_{n+1} 幵 $\cdots$，则称数列是单调递减的．单调递增数列与单调递减数列统称为单调数列．

准则 II（单调有界原理）　单调有界的数列必存在极限．

不妨设 $\{a_n\}$ 是一单调递增的数列，且 $\exists M>0$，使对 $\forall n$，a_n • M，则数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 随 n 的增大而不断在数轴上向右平移，但不会超过点 M．因此，a_n 必然无限接近于某个实数 a ($a_n<a<M$)，a 便是数列 $\{a_n\}$ 的极限，如图 1-26 所示．

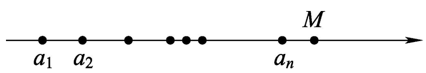


图 1-26

证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$．（详见教材）

例 6　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^x$.

解法 1　设 $t=\dfrac{4}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{4}{t}}=\lim_{t\to 0}[(1+t)^{\frac{1}{t}}]^{4}=\mathrm{e}^{4}.$$

解法 2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}\cdot 4}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^{4}=\mathrm{e}^{4}$.

例 7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x\cdot(-2)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$.

例 8 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{4x-3}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{4x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{4x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x\cdot 2}\cdot 1=\mathrm{e}^{2}$

结论 一般地，有公式

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+c}=\mathrm{e}^{ab}.$$

例 9 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{3}{2x}}{1+\dfrac{1}{2x}}\right)^{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{x}}{\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x}}\cdot 1=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}=\mathrm{e}$

【学生】掌握准则II与第二个重要极限

【教师】组织学生讨论以下问题

问题讨论

10M

1．夹逼准则与极限的定义有何内在联系？

2．单调递增（递减）有上界（下界）的数列一定是有界数列吗？

【学生】讨论、发言

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 30M	(见下文)	学习无穷小阶的比较。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

【教师】讲解无穷小阶的比较，并通过例题讲解介绍其应用

定义 1　设 α， β 是同一变化过程中的两个无穷小量，

（1）若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β 高阶的无穷小量，记为 $\alpha=o(\beta)$.

（2）若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是比 β 低阶的无穷小量.

（3）若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=c$（$c$ 是不等于零的常数），则称 α 与 β 是同阶无穷小量．特别地，若 $c=1$，则称 α 与 β 是等价无穷小量，记作 $\alpha\sim\beta$.

例 1　证明：当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

证明　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1$，所以 $x\to 0$ 时 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

例 2　证明：当 $x\to 0$ 时，$\arcsin x\sim x$.

证明　令 $t=\arcsin x$，则 $x=\sin t$. 因为 $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}=1,$$

故 $x\to 0$ 时，$\arcsin x\sim x$.

类似可证：$x\to 0$ 时，$\arctan x\sim x$.

例 3　证明：当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

证明　令 $\sqrt[n]{1+x}-1=h$，则 $x=(1+h)^n-1$，当 $x\to 0$ 时，有 $h\to 0$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\lim_{h\to 0}\frac{nh}{(1+h)^n-1}=\lim_{h\to 0}\frac{nh}{1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n-1}=1 .$$

定理 1　α 与 β 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta=\alpha+o(x)$．

故有：

$$\sin x=x+o(x)\text{；}\quad \tan x=x+o(x)\text{；}\quad \arcsin x=x+o(x)\text{；}$$

$$\arctan x=x+o(x)\text{；}\quad 1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\text{；}\quad \sqrt[n]{1+x}-1=\frac{1}{n}x+o(x).$$

定理 2（等价无穷小量代换定理）　若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}=A$ 存在，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}=A.$$

证明　$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}=\lim\frac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\frac{\alpha'}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}=A$．

定理 2 表明，在求两个无穷小之比的极限时，分子及分母都可用一个与它等价的无穷小来代替，这样可以简化很多函数极限的计算．下面给出一些常用的等价无穷小公式（当 $x\to 0$ 时）：

（1）$\sin x\sim x$；　　（2）$\arcsin x\sim x$；

（3）$\tan x\sim x$；　　（4）$\arctan x\sim x$；

（5）$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$；　　（6）$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$．

【学生】理解无穷小阶的比较

【教师】组织学生讨论以下问题

问题讨论

10M

1．当 $x\to 1$ 时，$1-x$ 与 $\frac{1}{3}(1-x^3)$ 或 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否是同阶无穷小量或等价无穷小量？

2．若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim(\alpha'\pm\beta')$ 存在，则 $\lim(\alpha\pm\beta)=\lim(\alpha'\pm\beta')$ 是否成立？若结论正确请给予证明；若结论不正确请举反例．

【学生】讨论、发言

课堂小结

5M

【教师】简要总结本节课的要点

本节课学习了极限存在准则与两个重要极限、无穷小阶的比较的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

【学生】总结回顾知识点

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 7 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 5 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="2">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="5">授课题目（教学章、节或主题）： 第一章 函数与极限
第八节 函数的连续性与间断点</td></tr>
<tr><td colspan="5">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）掌握连续函数的概念；
（2）能够判断函数的间断点，熟悉间断点的分类；
（3）理解初等函数的连续性，能够计算函数的连续区间；
（4）理解闭区间上连续函数的性质。
思政育人目标：
通过与实际现象联系，帮助学生理解函数的连续性，使学生体会到数学是源于生活的，是对实际问题的抽象产生的，不是脱离实际生活的；引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯；培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力。</td></tr>
<tr><td colspan="5">教学重点及难点：
教学重点：连续函数的概念、
教学难点：函数在某点连续性的判断
应对策略：既要举常见的例子也要讲述反例，要判断一个函数在某点是否连续，需要确保函数在该点的左右极限存在且与函数值相等。如果上述条件都满足，则函数在该点是连续的。在某个特定点处不连续并不意味着整个函数都是不连续的。一个函数可以在某些点处不连续，但在其他点处是连续的。</td></tr>
<tr><td colspan="5">作业、讨论题、思考题：
习题 1-8　T2 （1）T3（1）（3）（4）</td></tr>
<tr><td colspan="5">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了函数连续性、函数间断点的分类的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点
■教学反思</td></tr>
</table>

本节课发现部分学生缺乏练习，无法将所学知识很好地应用到题目中。在今后的教学中应更加注重课堂练习环节的作用，将其与平时成绩紧密结合，让学生自主参与，消除学生的惰性，培养学生良好的学习习惯。

下节课预习重点：

闭区间上连续函数的性质

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

<table>
<tr><th>课时
分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及
手段</th></tr>
<tr>
<td>**知识
讲解**

45M</td>
<td>

【教师】讲解连续函数的概念，并通过例题讲解介绍其应用

案例[平面内曲线] 在坐标平面内画一连续曲线 $y=f(x)$，如图 1-27 所示. 在坐标平面内画一间断曲线 $y=g(x)$，如图 1-28 所示.

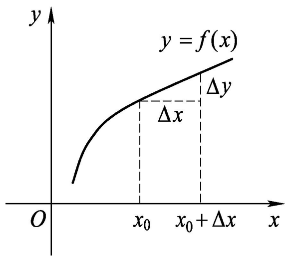


图 1-27

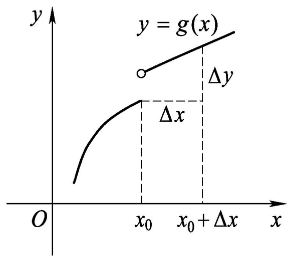


图 1-28

分析 对比两个图形，我们发现：对于 $y=f(x)$，当自变量 x 的改变量 $\Delta x \to 0$ 时，函数相应的改变量 $\Delta y \to 0$，如图 1-27 所示；对于 $y=g(x)$，当自变量 x 的改变量 $\Delta x \to 0$ 时，函数相应的改变量 Δy 不能够无限变小，如图 1-28 所示．于是我们可以用增量来定义函数的连续性.

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

若记 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x=x-x_0$，相应地函数 $f(x)$ 的增量 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$．当 $\Delta x\to 0$，即 $x\to x_0$ 时，$\Delta y\to 0$，$f(x)-f(x_0)\to 0$，也即 $f(x)\to f(x_0)$．

因此，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的定义也可表述如下：

定义 1′ 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某一个邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

若记 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x=x-x_0$，相应地函数 $f(x)$ 的增量 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$．当 $\Delta x\to 0$，即 $x\to x_0$ 时，$\Delta y\to 0$，$f(x)-f(x_0)\to 0$，也即 $f(x)\to f(x_0)$．

因此，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的定义也可表述如下：

</td>
<td>讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法

学习连续函数的概念、函数间断点的分类。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td>
</tr>
</table>

定义 1′ 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某一个邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

由函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续的定义可知，函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，必须同时满足下面三个条件：

（1） $f(x)$ 在 x_0 点有定义；

（2）极限值 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

（3）极限值 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 恰好等于 $f(x)$ 在该点的函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

若 $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在且等于 $f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点右连续；

若 $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在且等于 $f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点左连续.

定理 1 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点左右连续.

例 1 证明函数 $f(x)=x^2+1$ 在 $x=1$ 处连续.

证明一 $f(x)=x^2+1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域有定义.

当自变量在 $x=1$ 处有改变量 Δx 时，

$$\Delta y=(1+\Delta x)^2+1-(1^2+1)=2\Delta x+(\Delta x)^2,$$

因此，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[2\Delta x+(\Delta x)^2]=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

证明二 $f(x)=x^2+1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域有定义，

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2+1)=2,$$

即 $x\to 1$ 时 $f(x)$ 的极限值为 2．而 $f(1)=1^2+1=2=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$，即极限值等于函数在该点的函数值，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

定义 2 如果一个函数在某区间 (a,b) 内的每一点处都连续，则称这个函数在区间 (a,b) 内连续，或称其为区间 (a,b) 内的连续函数．如果函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 a 点右连续，b 点左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

<table>
<tr><th>课时分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及手段</th></tr>
<tr><td>知识讲解
30M</td><td>

【教师】讲解函数间断点的分类，并通过例题讲解介绍其应用

如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称点 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点.

由 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续的定义知，如果 $f(x)$ 在 x_0 处有以下三种情况之一，则 $f(x)$ 在 x_0 处间断：

（1） $y=f(x)$ 在点 x_0 处无定义；

（2） $x\to x_0$ 时 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

（3）函数值 $f(x_0)$ 和极限值 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 都存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 在点 $x=-1$ 处没有定义，$x=-1$ 就是函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 的一个间断点．如果不考虑函数 $f(x)$ 在 x_0 是否有定义，那我们可以将函数的间断点分为以下两大类.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处间断，但在点 x_0 的左右极限 $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 均存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点，其中：

（1）若 $f(x_0^+)=f(x_0^-)$，即极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则称点 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点.

（2）若 $f(x_0^+)\neq f(x_0^-)$，即极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，则称点 x_0 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处间断，若在点 x_0 的左右极限 $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 至少有一个不存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点，其中：

（1）若 $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 至少有一个为无穷大，则称点 x_0 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 振荡性地不存在，则称点 x_0 是 $f(x)$ 的振荡间断点.

</td><td>讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法

学习连续函数的概念、函数间断点的分类。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

例 3　函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -x+1, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处有定义，且 $f(0)=0$．但由于

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1$，$f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}(-x+1)=1$，$f(0^+)=f(0^-)=1\neq f(0)=0$，故 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点，如图 1-29 所示.

但如果将函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的定义改为 $f(0)=1$，则函数在 $x=0$ 点连续．由此可见，如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点是可去间断点，可通过补充或改变 $f(x)$ 在 x_0 点的函数值，使 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

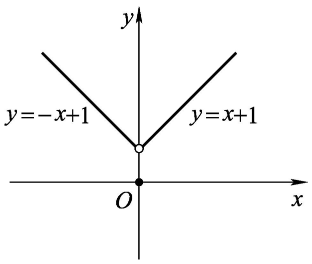


图 1-29

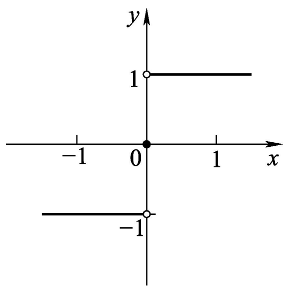


图 1-30

例 5　函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处无定义，由于 $f(0^+)=+\infty$，$f(0^-)=-\infty$，故 $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的无穷间断点，如图 1-31 所示.

但由于 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}1=1$，$f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}(-1)=-1$，即 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$ 都存在但不相等，故 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点，如图 1-30 所示.

例 6　函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处无定义，取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi-\dfrac{\pi}{2}}$，

$x_n'=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$ $(n=1,2,\cdots)$，当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to0$，$x_n'\to0$，但

$f(x_n)=\sin\left(2n\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$，$f(x_n')=\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，即当 $x\to0$ 时，函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 值在 -1 与 $+1$ 之间变动无限多次．故 $x=0$ 是函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 的振荡间断点，如图 1-32 所示.

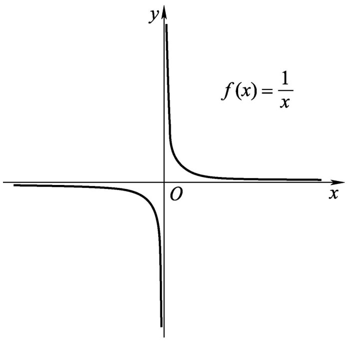


图 1-31

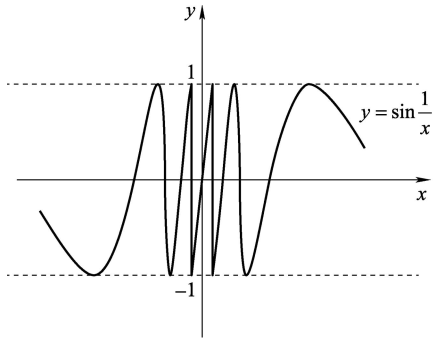


图 1-32

例 7　判断下列函数在指定点处的连续性，若间断，判别间断点的类型：

（1）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ e^x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处；

（2）$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 在点 $x_1=1$ 和 $x_2=2$ 处.

解　（1）函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有定义，且 $f(0)=2$. 但 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$，

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x+1)=2$，$f(0^+)\neq f(0^-)$，故 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点，属于第一类间断点.

（2）$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$ 在 $x_1=1$，$x_2=2$ 处无定义，故 $x_1=1$，$x_2=2$ 是 $f(x)$ 的间断点.

由于 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$，故 $x_1=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，属于第一类间断点.

由于 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-2}=\infty$，故 $x_2=2$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，属于第二类间断点.

问题讨论

10M

【学生】掌握函数间断点的分类

【教师】组织学生讨论以下问题

课堂 小结 **5 M**	1．函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义、有极限、连续三个结论有什么区别与联系． 2．若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义，则 x_0 点是函数 $f(x)$ 的第一类间断点，还是第二类间断点？ 3．分段函数 $f(x)=\begin{cases} g(x), & x \geqslant a, \\ h(x), & x<a \end{cases}$ 在分段点 $x=a$ 一定是间断点吗？ **【学生】讨论、发言** **【教师】简要总结本节课的要点** 本节课学习了函数连续性、函数间断点的分类、初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。 **【学生】总结回顾知识点**	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 7 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 6 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
</table>

授课题目（教学章、节或主题）： 第一章 函数与极限

第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性

第十节 闭区间上连续函数的性质

教学目的与要求：

知识技能目标：

（1）理解初等函数的连续性，能够计算函数的连续区间；

（2）理解闭区间上连续函数的性质；

（3）理解初等函数的连续性，能够计算函数的连续区间；

（4）理解闭区间上连续函数的性质。

思政育人目标：

高等数学中函数的连续性与社会的可持续发展有异曲同工之处。函数的连续性是研究其他知识的前提，有了函数的连续性，我们才可以研究函数的可导、微分和积分，就如同有了绿水青山，才会有金山银山，才可能实现社会的可持续发展。通过对函数连续性的学习，学生深刻体会函数连续性在高等数学课程中所起的作用，深刻领会绿水青山就是金山银山，增强环境保护的意识。

教学重点及难点：

教学重点：函数在某点连续性的判断

教学难点：计算函数的连续区间

应对策略：“ 绿水青山，就是金山银山”通过对可持续发展的理解，引出函数连续性的概念，学生深刻体会函数连续性在高等数学课程中所起的作用。

作业、讨论题、思考题：

习题 1-9　T3 （2）（3）（4）

习题 1-10　T1　T2

课后小结：

■ **【教师】简要总结本节课的要点**

本节课学习了初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

■ **【学生】总结回顾知识点**

■ **教学反思**

本节课发现部分学生缺乏练习，无法将所学知识很好地应用到题目中。在今后的教学中应更加注重课堂练习环节的作用，将其与平时成绩紧密结合，让学生自主参与，消除学生的惰性，培养学生良好的学习习惯。

下节课预习重点：

导数的概念

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段

知识讲解

45M

【教师】讲解初等函数的连续性，并通过例题讲解介绍其应用

1．连续函数的和、差、积、商的连续性

根据函数在某点连续的定义和极限的四则运算法则，可得下面的定理.

定理 2　设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 连续，则它们的和、差、积、商都在点 x_0 连续.

例如，由于 $\sin x$， $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的每一点都连续，故 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 和 $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ 在其各自定义域上每一点都是连续的.

2．初等函数的连续性

利用函数连续的定义和性质可以证明：六种基本初等函数在其定义域上都是连续的.

由于初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算和复合而得到的函数，函数的连续性对四则运算和复合运算是封闭的，所以我们又有结论：

所有初等函数在其定义区间上都是连续的.

根据这一结论，求初等函数在其定义域内某点的极限时，只要求出该点的函数值即可.

例 8　求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{e^x+\cos(4-x)}{\sqrt{x}-3}$.

解　由于该函数是初等函数，且在 $x=4$ 处有定义，故由初等函数的连续性可以得出

$$\lim_{x\to 4}\frac{e^x+\cos(4-x)}{\sqrt{x}-3}=\frac{e^4+\cos 0}{2-3}=-e^4-1 .$$

例 9　求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

解　因为 $y=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续， $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 连续，故

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}]^{\frac{x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}e^{\ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}]^{\frac{x}{\sin x}}}$$

讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法

学习初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{1\cdot\ln e} = e^{1\cdot 1} = e\ .$$

结论　一般地，对形如 $y=u(x)^{v(x)}$ $(u(x)>0\,,u(x)\neq 1)$ 的幂指函数，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0$， $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b$，则

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^b\ .$$

3．反函数的连续性

定理 3　如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a\,,b]$ 上单调递增（或递减）且连续，那么它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 也在对应的区间上单调递增（或递减）且连续．

4．复合函数的连续性

定理 4　设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成的，$u(x_0)$ 在复合函数 $y=f[u]$ 的定义域内．若函数 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，且 $g(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 连续，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 也连续．

例 10　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$．

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$ ．

例 11　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$．

本题可通过变量替换转化为例 10 求出结果．

解　令 $t=e^x-1$，则 $x=\ln(1+t)$，且 $x\to 0$ 时，有 $t\to 0$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1\ .$$

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **30M**	见下文	

由例 10 和例 11 我们又得到几个等价无穷小量公式，即

$$\ln(1+x)\sim x\,(x\to 0)\;;\;\; \mathrm{e}^x-1\sim x\,(x\to 0)\,.$$

【学生】理解初等函数的连续性，学会计算函数的连续区间

【教师】讲解闭区间上连续函数的性质，并通过例题讲解介绍其应用

定理 1（有界性） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a\,,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a\,,b]$ 上有界．

定理 1 是指如果 $f(x)$ 在 $[a\,,b]$ 上连续，则 $\exists M>0$，对 $[a\,,b]$，使 $|f(x)|\bullet M$ ．

定理 2（最大值与最小值） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a\,,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a\,,b]$ 上一定能取得最大值与最小值．

定理 2 是指，如果 $f(x)$ 在 $[a\,,b]$ 上连续，则在 $[a\,,b]$ 上至少存在一点 ξ_1，使得 $f(\xi_1)$ 是 $f(x)$ 在 $[a\,,b]$ 上的最大值，即 $\forall x\in[a\,,b]$， $f(x)\bullet f(\xi_1)$；同样在 $[a\,,b]$ 上至少存在一点 ξ_2，使得 $f(\xi_2)$ 是 $f(x)$ 在 $[a\,,b]$ 上的最小值，即 $\forall x\in[a\,,b]$， $f(x)$ 幵 $f(\xi_2)$，如图 1-33 所示．

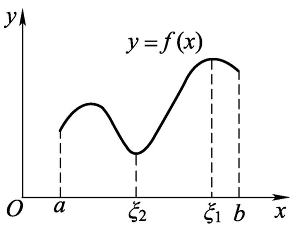


图 1-33

如果 $f(x_0)=0$，则称 x_0 点为函数 $f(x)$ 的零点．

定理 3（零点定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a\,,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a\,,b)$，使得 $f(\xi)=0$ ．

定理 4（介值定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a\,,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则在 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个常数 C，至少存在一点 $\xi\in(a\,,b)$，使得 $f(\xi)=C$ ．

介值定理的几何意义是连续曲线 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ 在 $(a\,,b)$ 内至少有一个交点，如图 1-36 所示．

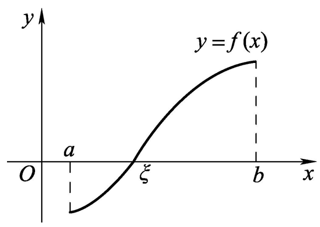


图 1-35

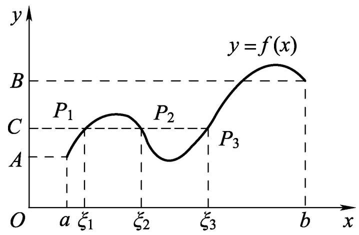


图 1-36

推论　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值，则对介于 m 和 M 之间的任一实数 C，至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=C$.

设 $m=f(x_1)$，$M=f(x_2)$，$m \neq M$，在闭区间 $[x_1,x_2]$（或 $[x_2,x_1]$）上应用介值定理，即得上述推论.

例 1　证明方程 $x^2+2x-1=0$ 在 $(0,1)$ 上至少有一个实根.

分析　本例实际上是证明函数 $f(x)=x^2+2x-1$ 在 $(0,1)$ 上存在零点.

证明　设 $f(x)=x^2+2x-1$，显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=-1$，$f(1)=2$，$f(0)\cdot f(1)<0$．由零点定理知，在 $(0,1)$ 至少存在一个 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即 $\xi^2+2\xi-1=0$．所以 ξ 是方程 $x^2+2x-1=0$ 的实根.

【学生】理解闭区间上连续函数的性质

问题讨论 10M

【教师】组织学生讨论以下问题

1．举几个非初等函数的例子.

2．求函数极限有哪些方法?

【学生】讨论、发言

课堂小结 5 M

【教师】简要总结本节课的要点

本节课学习初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

【学生】总结回顾知识点

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 8 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 7 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">授课题目（教学章、节或主题）： 第二章　导数与微分
第一节　导数概念</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）理解导数的概念；
（2）会利用导数定义求导数，会通过导数定义计算简单函数的导数；
（3）理解函数的可导性与连续性的关系；
（4）理解导数的几何意义。
思政育人目标：
通过引导学生从生活中发现导数的定义，并一步步的探索，感受成功的乐趣，增强学生的自信心；体会数学的“无处不在”以及科学性和严谨性；帮助学生形成良好的学习习惯。体会数学中对立统一的辩证思想，从有限认识无限，理解有限与无限，将空间图形联系到实际生活，体会数学的辩证统一。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学重点及难点：
教学重点：导数的概念、导数的几何意义
教学难点：利用导数定义求导数
应对策略：在讲解导数的定义时可通过高铁的瞬时速度引出，高铁是我国创新能力的标志性成果，象征着中华民族奔向伟大复兴目标的矢志不渝。通过课程思政教育与案例结合，使学生学习导数的同时能够深刻感受到祖国的日益强大，将爱国情怀植入心中，担当中华民族伟大复兴的中国梦，为人类作出新的更大的贡献。</td></tr>
<tr><td colspan="6">作业、讨论题、思考题：
习题 2-1　T1　（1）　T2（2）</td></tr>
<tr><td colspan="6">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了导数产生的背景、导数的定义、导数的几何意义、函数可导性与连续性的关系的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点</td></tr>
</table>

■ **教学反思**

本节课由于前面的讲解没有注意时间，所用时间过长，导致前松后紧，课堂练习环节所留的时间较为紧张。在今后的教学中要以此为鉴，更加注重时间的分配，避免发生类似情况。

下节课预习重点：

函数的求导法则

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **45M**	**【教师】讲解导数产生的背景，并通过例题讲解介绍其应用** 例 1　求变速直线运动物体的瞬时速度． 设某物体做变速直线运动，在$[t_1,t_2]$时间内运动的路程为$s(t)$ $(t\in[t_1,t_2])$，求物体在时间$t_0\in[t_1,t_2]$的瞬时速度$v=v(t_0)$． 如果质点做匀速直线运动，那么按照公式 $$速度=\frac{路程}{时间}$$ 便可求出v_0．但现在要求质点做变速直线运动的瞬时速度，遇到了速度变与不变的矛盾，在整个时间间隔$[t_1,t_2]$内不能应用上述公式求t_0时刻的速度v_0．但孤立地停止在t_0时刻，又无法求出v_0，初等数学的知识已解决不了这一问题．那么我们可以设法在物体的运动变化和相互联系中，利用矛盾转化的方法，分三步来解决这一问题． （1）给t_0一个增量Δt，时间从t_0变到了$t_0+\Delta t$，路程有了增量 $$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0),$$ 这一步称为“求增量”． （2）当Δt很小时，速度来不及有较大的变化，可把质点在Δt间隔内的运动近似地看成匀速运动，这实质上是把变速运动近似地转化成匀速运动．现求物体在Δt内的平均速度 $$\overline{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t},$$ 这一步简称为“求增量比”． （3）Δt越来越小，平均速度便越来越接近于t_0时刻的瞬时速度v_0，于是当$\Delta t\to 0$时，平均速度的极限就是瞬时速度v_0，即 $$v_0=\lim_{\Delta t\to 0}\overline{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t},$$ 这一步简称为“取极限”．	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法 学习导数产生的背景、导数的定义。 边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

这样以辩证法为指导，以极限为工具，解决了初等数学无能为力的问题．用此结论，我们可以推出自由落体运动 $s=\frac{1}{2}gt^2$（g 为常数）在 t_0 时刻的速度为 $v(t_0)=gt_0$.

例 2　求曲线切线的斜率．

如图 2-1 所示，设连续曲线 $C: y=f(x)$ 及 C 上的点 $M(x_0, y_0)$，在曲线 C 上任取一点 $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，作割线 MN．如果 N 在曲线 C 上逐渐向 M 点移动，则割线 MN 绕点 M 转动．当 N 点移动到 M 位置（与 M 重合）时，得到直线 MN 的极限位置 MT，则称 MT 为曲线 C 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线．这个定义包含了中学数学圆的切线定义．

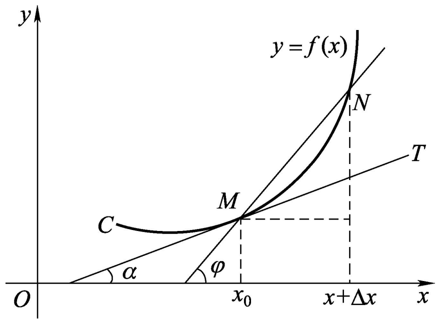


图 2-1

【学生】了解导数产生的背景

【教师】讲解导数的定义，并通过例题讲解介绍其应用

1．函数在一点处的导数

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 取得改变量 Δx（$x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内，且 $\Delta x\neq 0$）时，相应有函数的改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

存在，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且极限值称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的导数，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \tag{2}$$

$f'(x_0)$ 也可以记作

$$y'\big|_{x=x_0},\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \text{或} \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

导数定义公式（2）还可以有以下几种形式：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

【学生】了解导数产生的背景

【教师】讲解导数的定义，并通过例题讲解介绍其应用

1．函数在一点处的导数

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 取得改变量 Δx（$x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内，且 $\Delta x\neq 0$）时，相应有函数的改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

存在，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且极限值称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的导数，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \tag{2}$$

$f'(x_0)$ 也可以记作

$$y'\big|_{x=x_0},\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \text{或} \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

由导数的定义可知，例 1 中提到的自由落体运动 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 在 t_0 时刻的速度 $v(t_0)$ 实际就是 $s(t)$ 在 $t=t_0$ 时的导数，因此

$$\begin{aligned}
v(t_0)=s'(t_0)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{\Delta t}=\frac{1}{2}g\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t_0+\Delta t)^2-t_0^2}{\Delta t}\\
&=\frac{1}{2}g\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(2t_0+\Delta t)\Delta t}{\Delta t}=\frac{1}{2}g\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta t+2t_0)\\
&=\frac{1}{2}g\cdot 2t_0=gt_0.
\end{aligned}$$

故物体做自由落体运动在任意时刻 t 的速度 $v(t)=gt$．

若极限式（2）不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导，x_0 称为函数 $f(x)$ 的不可导点；如果不可导的原因是式（2）的极限为 ∞，为方便起见，此时也称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数为无穷大．

例 3　已知常值函数 $f(x)=C$（C 为常数），求 $f'(x_0)$，$x_0\in(-\infty,+\infty)$.

解　$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{C-C}{\Delta x}=0$.

这说明常数的导数等于零.

例 4　设函数 $f(x)=x^n$（n 为正整数），求 $f'(x_0)$.

解　$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^n-x_0^n}{x-x_0}$

$$=\lim_{x\to x_0}(x^{n-1}+x_0\cdot x^{n-2}+\cdots+x_0^{n-2}\cdot x+x_0^{n-1})=nx_0^{n-1}.$$

2．左导数和右导数

如果极限

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},\quad f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则分别称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的**左导数**和**右导数**. $f(x)$ 在 x_0 点的左导数和右导数称为 $f(x)$ 在 x_0 点的单侧导数.

由极限存在的充要条件，可以得出以下结论：

$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$ 存在，且 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

例 5　绝对值函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处是否可导？

解　由导数定义可求

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

因为 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，所以 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 点导数不存在.

从函数 $y=|x|$ 的图像（见图 2-2）容易发现，在 $x=0$ 处图像产生了“尖点”. 由此可以猜想：如果函数在 $x=x_0$ 处可导，则其图像必定在该点处是“光滑”状态.

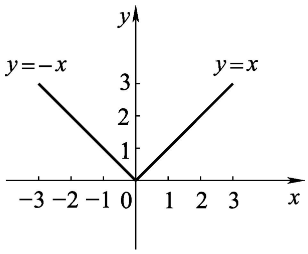


图 2-2

3．函数的导函数

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都可导，则称函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导．这样对每一个 $x\in(a,b)$， $f(x)$ 都有一个导数值 $f'(x)$，因此 $f'(x)$ 构成了一个新的函数，这一新的函数称为 $f(x)$ 的导函数，在不至于产生混淆的情形下，仍简称为导数，记为 y'， $f'(x)$， $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$， $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$， 即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$， $f'_-(b)$ 都存在，我们称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导．

例 6　求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数．

解　$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x.$$

所以 $(\sin x)'=\cos x$．

用类似方法可证明 $(\cos x)'=-\sin x$．

例 7　求函数 $f(x)=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$ 的导数．

解　$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{x\ln a}.$$

所以 $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，特别地 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

例 8　求函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解　$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$.

设 $a^h-1=t$，则 $h=\log_a(t+1)$，当 $h\to 0$ 时，$t\to 0$．所以

$$f'(x)=a^x\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)}=a^x\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log_a(1+t)}$$

$$=a^x\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=a^x\frac{1}{\log_a \mathrm{e}}=a^x\ln a.$$

所以 $(a^x)'=a^x\ln a$.

同理可得 $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.

【学生】理解导数的定义，学会利用导数定义求导数，会通过导数定义计算简单函数的导数

<table>
<tr><th>课时分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及手段</th></tr>
<tr><td>知识讲解
30M</td><td>

【教师】讲解导数的几何意义，并通过例题讲解介绍其应用

由例 2 关于曲线切线的讨论及导数的定义可知：

$f'(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 表示的曲线在 $(x_0, f(x_0))$ 点切线 T 的斜率 k，即 $f'(x_0)=k=\tan\alpha$（α 为切线 T 的倾斜角），如图 2-1 所示.

于是，当 $f'(x_0)$ 存在时，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

若 $f'(x_0)=\infty$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处具有垂直于 x 轴的切线（也称铅直切线），其方程为 $x=x_0$. 过切点 $(x_0, f(x_0))$ 且与切线垂直的直线称为曲线 $y=f(x)$ 在该点的法线，相应的法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\quad (f'(x_0)\neq 0).$$

例 9　求曲线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程与法线方程.

解　由导数几何意义知，曲线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处切线的斜率 $k_1=(x^2)'_{x=1}=2x\big|_{x=1}=2$，因此，所求切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$.

曲线在点 $(1,1)$ 处法线的斜率 $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{2}$，因此，所求法线方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$，即 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

【学生】理解导数的几何意义

【教师】讲解函数可导性与连续性的关系，并通过例题讲解介绍其应用

定理 1　如果函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，则函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处必连续.

证明　由于函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

根据函数的极限与无穷小的关系定理可知

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha,$$

其中

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0,$$

所以

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

</td><td>学习导数的几何意义、函数可导性与连续性的关系。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

于是当 $\Delta x \to 0$ 时，有 $\Delta y \to 0$．所以，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续．

该定理可简言之：可导必连续．但其逆命题不成立．例如，函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，但在 $x=0$ 处不可导．这说明函数在某点处连续是该点处可导的必要条件，但不是充分条件．

例 10　设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \leqslant 1, \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处可导，试确定 a，b 的值．

解　因为函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，所以函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处必连续，即

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=f(1).$$

而

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-} x^2=1,\ \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(ax+b)=a+b,$$

所以

$$a+b=1.$$

又因 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，故 $f'_-(1)=f'_+(1)$．

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x+1)=2,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{ax+(1-a)-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a,$$

于是 $a=2$，易得 $b=-1$．

综上所述，当函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导时，$a=2$，$b=-1$．

【学生】理解闭区间上连续函数的性质

问题讨论

10M

【教师】组织学生讨论以下问题

1．若 $f'(x_0)$ 存在，观察下列极限，指出 A 表示什么？

（1）$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$；

课堂小结

5 M

（2）$f(x_0)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x_0-x}=A$；

（3）$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$．

2．若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，在什么情况下，$|f(x)|$ 在 $x=0$ 处也可导？

3．总结求导数 $f'(x)$ 的步骤．

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 8 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 8 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">授课题目（教学章、节或主题）： 第二章　导数与微分
第二节　函数的求导法则</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）熟练掌握导数的四则运算法则；
（2）熟记 16 个基本初等函数导数公式；
（3）掌握复合函数的求导法则。
思政育人目标：
通过学习导数的四则运算法则和基本初等函数导数公式，培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学重点及难点：
教学重点：导数的四则运算法则、基本初等函数导数公式
教学难点：利用初等函数导数公式求导
应对策略：进行公式推导并总结一般规律帮助记忆，反复提问并大量练习。</td></tr>
<tr><td colspan="6">作业、讨论题、思考题：
习题 2-2　T2　T6</td></tr>
<tr><td colspan="6">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了导数的四则运算法则、反函数的求导法则、复合函数的求导法则、基本初等函数导数公式的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点
■教学反思
本节课公式、例题较多，在利用例题介绍知识点时，有些内容介绍得速度较快，一些后进生没有很好地理解。在今后的教学中要注意全方位考虑学生的理解能力，通过单独辅导、互助指导等方式对后进生进行帮助。</td></tr>
<tr><td colspan="6">下节课预习重点：
高阶导数</td></tr>
</table>

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **45M**	**【教师】讲解导数的四则运算法则，并通过例题讲解介绍其应用** 定理 1（导数的四则运算法则）　设 $u(x)$，$v(x)$ 在 x 点可导，则它们的和、差、积、商（分母为 0 的点除外）都在 x 点可导，且 （1）$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$； （2）$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$； （3）$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\ (v(x)\neq 0)$． 证明　首先我们看 $f(x)\pm g(x)$ 的导数，由定义可得 $[f(x)\pm g(x)]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)\pm g(x+\Delta x)]-[f(x)\pm g(x)]}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\pm\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(x)\pm g'(x)$． 所以 $f(x)\pm g(x)$ 可导，且 $$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x).$$ 再看 $f(x)g(x)$ 的导数，由定义可得 $[f(x)g(x)]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x+\Delta x)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}f(x)$ $=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$． 这里 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)=g(x)$ 是由 $g(x)$ 可导必连续得到，所以 $f(x)g(x)$ 可导，且 $$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$ 同理我们可证得 $\frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x)\neq 0)$ 也可导且 $$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$ 公式中的 $u(x)$，$v(x)$ 和 $u'(x)$，$v'(x)$ 可简单表示为 u，v，u'，v'． 定理 1 中的法则（1）、（2）可推广到任意有限个函数导数的运算．例如，	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法 学习导数的四则运算法则、反函数的求导法则。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

若 $u(x)$，$v(x)$，$w(x)$ 可导，则有 $[u \pm v \pm w]' = u' \pm v' \pm w'$，$[uvw]' = u'vw + uv'w + uvw'$.

易知 $(Cu)' = Cu'$（C 为常数）.

例 1　设 $f(x) = 2\sqrt{x}\cos x - \sin\dfrac{\pi}{4}$，求 $f'(x)$ 及 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解

$$f'(x) = 2(\sqrt{x}\cos x)' - \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)' = 2[(\sqrt{x})'\cos x + \sqrt{x}(\cos x)'] - 0$$

$$= 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x - \sqrt{x}\sin x\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\cos x - 2\sqrt{x}\sin x ,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\cos x - 2\sqrt{x}\sin x\right)\Bigg|_{x=\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{2\pi} .$$

例 2　求函数 $y = \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)$ 的导数.

解　$y' = (\mathrm{e}^x)'(\sin x + \cos x) + \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)'$

$$= \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) + \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x)$$

$$= 2\mathrm{e}^x\cos x .$$

例 3　求函数 $f(x) = \tan x$ 的导数.

解　$(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.

同理可求得 $(\cot x)' = -\csc^2 x$.

例 4　求正割函数 $f(x) = \sec x$ 的导数.

解　$(\sec x)' = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos x}\tan x = \sec x\tan x$.

同理可求得 $(\csc x)' = -\csc x\cot x$.

利用导数的四则运算法则，可以得到如下基本初等函数的导数公式：

$$(\tan x)' = \sec^2 x ，\quad (\cot x)' = -\sec^2 x ，$$

$$(\sec x)' = \sec x\tan x ，\quad (\csc x)' = -\csc x\cot x .$$

【学生】掌握导数的四则运算法则

【教师】讲解反函数的求导法则，并通过例题讲解介绍其应用

定理 2（反函数导数运算性质）　若函数 $x = f(y)$ 在区间 I_y 上单调可导，则其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x = \{x \mid x = f(y), y \in I_y\}$ 内可导，且

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}，\quad 即 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} .$$

证明 定理的条件已保证反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在，且 $f^{-1}(x)$ 在区间 I_x 内单调、连续．$\forall x\in I_x$，给 x 以增量 $\Delta x\ (\Delta x\neq 0, x+\Delta x\in I_x)$，由 $y=f^{-1}(x)$ 的单调性知

$$\Delta y=f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)\neq 0,$$

于是有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\Delta x/\Delta y}$，所以

$$[f^{-1}(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x/\Delta y}=\frac{1}{f'(y)}.$$

定理 2 可简单叙述成：**反函数的导数等于原函数导数的倒数**．

例 5 求正弦函数 $x=\sin y, y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的反函数 $y=\arcsin x, x\in[-1,1]$ 的导数．

解 由于 $x=\sin y$ 在 $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调可导，由定理 2 可知

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}.$$

因为 $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\cos y>0$，所以 $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$，所以

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可证余弦函数 $x=\cos y, y\in[0,\pi]$ 的反函数 $y=\arccos x, x\in[-1,1]$ 的导数为

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

例 6 求正切函数 $x=\tan y, y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的反函数 $y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty)$ 的导数．

解 因为正切函数 $x=\tan y$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调可导，由定理 2 可知

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

同理可证余切函数 $x=\cot y, y\in(0,\pi)$ 的反函数 $y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty)$ 的导数为

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

由于指数函数 $x=a^y\ (a>0, a\neq 1)$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数，且 $(a^y)'=a^y\ln a$，利用定理 2 可求得 $y=\log_a x$ 的导数为

$$(\log_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

【学生】理解反函数的求导法则

<table>
<tr><th>课时
分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及
手段</th></tr>
<tr><td>知识
讲解

30M</td><td>

【教师】讲解复合函数的求导法则，并通过例题讲解介绍其应用

定理 3（复合函数导数的运算法则） 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，$y=f(u)$ 在对应点 $u=\varphi(x)$ 处可导，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x 处可导，且有

$$[f(\varphi(x))]'=f'(u)\varphi'(x)=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

证明 因为函数 $y=f(\varphi(x))$ 是由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成的，$u=\varphi(x)$ 在 x 点可导，$y=f(u)$ 在对应的 $u=\varphi(x)$ 点可导，则有 $\Delta x\to 0$，$\Delta u\to 0$，$f'(u)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}$，$u'(x)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$，这样我们可得复合函数的导数公式

$$\begin{aligned}[f(\varphi(x))]'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\&=f'(u)\cdot u'(x)=f'(\varphi(x))\varphi'(x)\end{aligned}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

定理 3 也称为复合函数求导的链式法则．本法则可推广到求多个函数复合而成的复合函数的导数．例如，函数 $v=v(x)$ 在点 x 处可导，$u=u(v)$ 在对应点 $v=v(x)$ 处可导，$y=f(u)$ 在对应点 $u=u(v)$ 处可导，则复合函数 $y=f(u(v(x)))$ 在点 x 处可导，且有

$$[f(u(v(x)))]'=f'(u)u'(v)v'(x)=f'(u(v(x)))u'(v(x))v'(x).$$

例 7 设 $x>0$，证明幂函数的导数公式 $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$（μ 为常数）.

证明 $x^{\mu}=\mathrm{e}^{\ln x^{\mu}}=\mathrm{e}^{\mu\ln x}$，显然 $\mathrm{e}^{\mu\ln x}$ 是由 $y=\mathrm{e}^{u}$，$u=\mu\ln x$ 复合而成的，因为 $u=\mu\ln x$ 在 x 点可导，$y=\mathrm{e}^{u}$ 在 $u=\mu\ln x$ 点可导，由定理 3 可知

$$(x^{\mu})'=(\mathrm{e}^{u})'u'=\mathrm{e}^{u}\mu\frac{1}{x}=\mu\mathrm{e}^{\mu\ln x}\frac{1}{x}=\mu x^{\mu-1}.$$

因此，所有有理指数的幂函数均可求导，如 $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

例 8 $y=\mathrm{e}^{x^3}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $y=\mathrm{e}^{x^3}$ 是由 $y=\mathrm{e}^{u}$，$u=x^3$ 复合而成的，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(\mathrm{e}^{u})'\cdot(x^3)'=\mathrm{e}^{u}\cdot 3x^2=3x^2\mathrm{e}^{x^3}.$$

例 9 $y=(2+x^7)^{100}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

</td><td>学习复合函数的求导法则、基本初等函数导数公式。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

解 $y=(2+x^7)^{100}$ 是由 $y=u^{100}$， $u=2+x^7$ 复合而成的，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(u^{100})'\cdot(2+x^7)'=100u^{99}\cdot 7x^6=700x^6(2+x^7)^{99}.$$

当复合函数中间变量有多个时，求复合函数导数时，按中间变量顺序依次求导即可.

例 10 $y=\arctan\ln(x^2+1)$，求 y'.

解 $y=\arctan\ln(x^2+1)$ 是由 $y=\arctan u$， $u=\ln v$， $v=x^2+1$ 复合而成的，所以

$$y'=(\arctan u)'(\ln v)'(x^2+1)'$$
$$=\frac{1}{1+u^2}\frac{1}{v}2x=\frac{1}{1+\ln^2(1+x^2)}\cdot\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2x}{(1+x^2)(1+\ln^2(1+x^2))}.$$

例 11 $y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}$，求 y'.

解 $y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\sin v$，$v=\frac{1}{x}$ 复合而成的，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^u\cos v\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}.$$

当求导熟练以后，则可不必写出中间变量，例 11 也可直接解为

$$y'=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

例 12 $y=x^2f(\sin x)$，求 y'.

解 $y'=2x\cdot f(\sin x)+x^2\cdot f'(\sin x)\cdot(\sin x)'=2xf(\sin x)+x^2f'(\sin x)\cos x$

【学生】理解复合函数的求导法则

【教师】讲解基本初等函数导数公式，并通过例题讲解介绍其应用

1．基本初等函数导数公式

（1） $C'=0$（C 为常数）；（2） $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$（μ 为常数）；

（3） $(\sin x)'=\cos x$；（4） $(\cos x)'=-\sin x$；

（5） $(\tan x)'=\sec^2 x$；（6） $(\cot x)'=-\csc^2 x$；

（7） $(\sec x)'=\sec x\tan x$；（8） $(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

（9） $(a^x)'=a^x\ln a\ (a>0, a\neq 1)$；（10） $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

（11） $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}(a>0, a\neq 1)$；（12） $(\ln x)'=\frac{1}{x}$；

（13） $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；（14） $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

（15） $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$； （16） $(\text{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

2．基本求导法则

（1） $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$ ；

（2） $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ ；

（3） $(Cu)' = Cu'$ (C 是常数)；

（4） $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ $(v(x) \neq 0)$ ；

（5） $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ ；

（6）若 $x = f(y)$ 的反函数为 $y = f(x)$ ，则

$$[f(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} ;$$

（7）若 $y = f(u)$ ，$u = g(x)$ ，则

$$y' = f'(u) \cdot g'(x) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} .$$

【学生】熟记 16 个基本初等函数导数公式

问题讨论 10M

【教师】组织学生讨论以下问题

1．设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处都不可导，能否断定 $C_1 f(x) + C_2 g(x)$ (C_1 ，C_2 为常数)在 $x = x_0$ 处一定可导或一定不可导？

2．若 $y = f(x)$ 是 $y = f^{-1}(x)$ 的反函数，且 $y = f(x)$ 在区间 I_x 上单调可导，则其反函数的导数 $(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(x)}$ ，这个结论正确吗？

【学生】讨论、发言

课堂小结 5 M

【教师】简要总结本节课的要点

本节课学习了导数的四则运算法则、反函数的求导法则、复合函数的求导法则、基本 初等函数导数公式的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

【学生】总结回顾知识点

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 8 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 9 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="2">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="5">授课题目（教学章、节或主题）： 第二章　导数与微分
第三节　高阶导数
第四节　隐函数及由参数所确定函数的导数</td></tr>
<tr><td colspan="5">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）掌握高阶导数的定义及计算；
（2）理解显函数和隐函数的定义；
（3）理解由参数方程确定的函数的导数。
思政育人目标：
通过先求一阶导数，再逐步向上求解的方式，告诫学生们在学习、生活以及以后的工作中，做任何事情要一步一个脚印，培养踏踏实实的做事态度，我们的能力才能寻求到突破。当你不再寻求捷径，成功也就不再遥远。不积跬步，无以至千里，不积小流，无以成江海。饭要一口一口地吃，路要一步一步地走，事情要一件一件地做。</td></tr>
<tr><td colspan="5">教学重点及难点：
教学重点：高阶导数的概念、显函数和隐函数的定义
教学难点：高阶导数的计算
应对策略：在掌握一阶导数计算方法后逐步引出高阶导数的概念，学生在求解高阶导数的过程中，也许会联想到神舟飞船的发展历程，这样的学习过程会使大家加深对高阶导数求解的理解，使学生在完成自己的学业过程中，脚踏实地，砥砺前行。</td></tr>
<tr><td colspan="5">作业、讨论题、思考题：
习题 2-2　T1
习题 2-3　T1　T6</td></tr>
<tr><td colspan="5">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了高阶导数、隐函数与参数方程确定的函数的求导法则的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点</td></tr>
</table>

■ **教学反思**

本节课效果不错，每个学生都积极参与到教学活动中，发挥了自己的价值。在教学中分析了学生的特点，根据不同学生的学习情况采用了灵活多样的教学方法，营造出一种平等和谐、活跃有序的课堂氛围。

下节课预习重点：

函数的微分

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 45M		讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法 学习高阶导数的概念和计算。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

【教师】讲解高阶导数的概念

自由落体运动方程为 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$，其在时刻 t 的速度 $v(t)=s'(t)$，但如果我们要求物体在时刻 t 的加速度 $a(t)$，则 $a(t)=v'(t)$，即 $a(t)=[s(t)']'$．我们将 $a(t)$ 称为 $s(t)$ 的二阶导数，记为 $a(t)=s''(t)$．

一般地，有如下定义：

定义 如果函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x 处可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}=[f'(x)]'$$

存在，则称 $[f'(x)]'$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的二阶导数，记作

$$y''，\quad f''(x)，\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\ 或\ \frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}．$$

类似地，$f(x)$ 二阶导数的导数称为 $f(x)$ 的三阶导数，$f(x)$ 三阶导数的导数称为 $f(x)$ 的四阶导数，依此类推，$f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为 $f(x)$ 的 n 阶导数，分别记作

$$y''',y^{(4)},\cdots,y^{(n)}\ 或\ f'''(x),f^{(4)}(x),\cdots,f^{(n)}(x)\ 或\ \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3},\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}．$$

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数．为方便起见，函数 $f(x)$ 本身称为零阶导数，而 $f'(x)$ 称为一阶导数．

【学生】掌握高阶导数的概念

【教师】讲解高阶导数的计算，并通过例题讲解介绍其应用

例 1 设 $y=(1+x^2)\arctan x$，求 y''．

解 $y'=2x\arctan x+(1+x^2)\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=2x\arctan x+1$，

例 2 设 $y=\sin\ln x$，求 y''．

解 $y'=\cos\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\cos\ln x}{x}$，

$$y''=-\frac{-\sin\ln x\cdot\dfrac{1}{x}-\cos\ln x}{x^2}=-\frac{1}{x^2}(\sin\ln x+\cos\ln x)．$$

例 3 求指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的 n 阶导数．

解 $y'=\mathrm{e}^x$，$y''=(y')'=(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$，$y'''=(y'')'=\mathrm{e}^x$，…，所以

$$y^{(n)}=\mathrm{e}^x．$$

例 4 求 $y=\sin x$ 的 n 阶导数．

解 对 $y=\sin x$，$y'=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$y''=(y')'=-\sin x=\sin(x+\pi)$，

$$y'''=(y'')'=(-\sin x)'=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)，$$

$y^{(4)}=(y''')'=\sin x=\sin\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right)$，

依此类推可求得

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

用类似的方法可求得

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

例 5　求幂函数 $y=x^{\mu}$ 的 n 阶导数.

解　$y'=\mu x^{\mu-1}$，$y''=\mu(\mu-1)x^{\mu-2}$，$y'''=\mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}$，$\cdots$，

$y^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$.

当 $\mu=n$ 时，

$$(x^{n})^{(n)}=n!.$$

例 6　求函数 $y=\dfrac{1}{1+x}$ 的 n 阶导数.

解　$y'=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$，$y''=-\dfrac{-2(1+x)}{(1+x)^4}=\dfrac{2}{(1+x)^3}$，

$y'''=-2\cdot\dfrac{3(1+x)^2}{(1+x)^6}=-\dfrac{6}{(1+x)^4}$，$y^{(4)}=-6\dfrac{-4(1+x)^3}{(1+x)^8}=\dfrac{24}{(1+x)^5}$，$\cdots$，

依此类推可求得

$$y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

若 $u(x)$，$v(x)$ 存在 n 阶导数，由导数四则运算法则易知：

$$[u(x)\pm v(x)]^{(n)}=u(x)^{(n)}\pm v(x)^{(n)}.$$

下面求 $u(x)v(x)$ 的 n 阶导数公式，由求导运算法则可得：

$$(uv)'=u'v+uv',$$

$$(uv)''=(u'v+uv')'=u''v+2u'v'+uv'',$$

$$(uv)'''=(u''v+2u'v'+uv'')'=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv''',$$

用数学归纳法可证明

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$

上述 uv 的 n 阶导数公式称为莱布尼兹（Leibniz）公式，这个公式可通过 $(u+v)^n$ 二项展开式公式记忆. $(u+v)^n$ 二项展开式如下：

$(u+v)^n=u^nv^0+nu^{n-1}v+\frac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v^2+\cdots+C_n^ku^{n-k}v^k+\cdots+u^0v^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^ku^{n-k}v^k$ 将 $(u+v)^n$ 的二项展开式等式左端 $(u+v)^n$ 用 uv 的 n 阶导代替，等式右边的 k 次幂换成 k 阶导，零阶导理解为函数本身，这样得 uv 的 n 阶导数公式（莱布尼兹公式）为

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}.$$

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **30M**	**【教师】讲解复合函数的求导法则，并通过例题讲解介绍其应用** 函数表示两个实数集之间的对应关系，这种对应关系根据实际情况往往要通过不同的方式来表达．例如，我们前面研究的函数 $y=\sin x$ 和 $y=x^2+1$，这些函数的因变量 y 均可以用关于自变量 x 的代数式表示，这种函数称为显函数．再如，椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (y>0)$，其自变量 x 与因变量 y 之间的对应关系通过关于 x，y 的方程，表示这种函数称为隐函数．在物理学、工程技术和经济学中，变量之间的函数关系一般要通过方程表示． 定义 1　在一个方程 $F(x,y)=0$ 中，若 x 在某一数集 D 内任意取值都有唯一确定的 y 使 x,y 是该方程的解，那么就称 $F(x,y)$ 在数集 D 上确定了一个隐函数 $y=y(x)$． 例 1 求由方程 $x-y^3-1=0$ 确定的隐函数的导数． 解　y 是 x 的函数，将方程 $x-y^3-1=0$ 两边同时对 x 求导得 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-y^3-1)=0,$$ 即 $1-3y^2\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-0=1-3y^2\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{3y^2}$． 例 2　求由方程 $xy-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数． 解　方程两边对 x 求导（注意 y 是 x 的函数）得 $$y+xy'-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y\cdot y'=0.$$ 当 $x+\mathrm{e}^y\neq0$ 时，解得 $$y'=\frac{\mathrm{e}^x-y}{x+\mathrm{e}^y}.$$ 例 3　求双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 在点 $\left(5,\dfrac{8}{3}\right)$ 处切线方程． 解　方程 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 两边同时对 x 求导得 $$\frac{2x}{9}-\frac{2y}{4}\cdot y'=0,$$ 求得 $y'=\dfrac{4x}{9y}$． 所以，双曲线在点 $\left(5,\dfrac{8}{3}\right)$ 处切线斜率为 $$k=y'\Big\vert_{\left(5,\frac{8}{3}\right)}=\frac{4\cdot5}{9\cdot\frac{8}{3}}=\frac{5}{6},$$ 从而所求切线方程为 $$y-\frac{8}{3}=\frac{5}{6}(x-5),$$	学习隐函数与参数方程确定的函数的求导法则。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

化简得

$$5x-6y-9=0.$$

对于某些显函数，利用常规的方法求导很复杂，也比较难求，如幂指函数和多个函数乘除开方求导，这时我们可对函数表达式两边取对数，简化函数，再用隐函数求导方法求出函数的导数，这种求导数的方法通常称为取对数求导法．下面通过几个例子来说明这种方法．

例 4　求幂指数函数 $y=(\tan x)^{\sin x}$ 的导数．

解　函数 $y=(\tan x)^{\sin x}$ 两边取对数得

$$\ln y=\sin x\cdot\ln\tan x,$$

方程两边对 x 求导得

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\ln\tan x+\sin x\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x=\cos x\ln\tan x+\sec x.$$

所以，$y'=y(\cos x\ln\tan x+\sec x)=(\tan x)^{\sin x}(\cos x\ln\tan x+\sec x)$ ．

【学生】理解隐函数的导数

【教师】讲解由参数方程确定的函数的导数，并通过例题讲解介绍其应用

定义 2　若参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定了 y 与 x 的函数关系 $y=y(x)$，则此函数称为由参数方程确定的函数 $y=y(x)$．

在解决实际问题时，往往需要计算由参数方程确定的函数的导数，但由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 消去 t 确定 y 与 x 的关系方程通常很困难，因此，需要研究直接由参数方程计算函数导数的方法，具体内容如下．

设由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数，$\varphi(t)$，$\psi(t)$ 可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，$x=\varphi(t)$ 是单调连续的，其反函数为 $t=\varphi^{-1}(x)$．

在上述条件下，$y=\psi(t)=\psi(\varphi^{-1}(x))$，由复合函数求导与反函数求导法则可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}.$$

所以，由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$确定的函数 $y=y(x)$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

例 6 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}$ 求椭圆在 $t=\frac{\pi}{4}$ 相应点处的切线方程.

解 当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，设椭圆上的对应点为 $M_0(x_0,y_0)$，则

$$x_0=a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}a,\quad y_0=b\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}b.$$

设 M_0 点切线的斜率为 k，则

$$k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)}=\left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\left.\frac{b\cos t}{a\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}.$$

因此，所求切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}b=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right),$$

化简得

$$bx+ay-\sqrt{2}ab=0.$$

若由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$确定的隐函数存在二阶导数，则由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

$$=\frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)},$$

	所以 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{\varphi'^3}$. **【学生】理解由参数方程确定的函数的导数** **【教师】组织学生讨论以下问题** 1．关于 x， y 的方程 $F(x,y)=0$ 都能确定 y 是 x 的函数吗？ 2．由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定的函数的导数为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$，则函数的二阶导数为 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}$，这一结论是否正确？ **【学生】讨论、发言**	
问题 讨论 **10M**		
课堂 小结 **5 M**	**【教师】简要总结本节课的要点** 本节课学习了高阶导数、隐函数与参数方程确定的函数的求导法则的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。 **【学生】总结回顾知识点**	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 9 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 10 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">授课题目（教学章、节或主题）： 第二章 导数与微分
第五节 函数的微分</td></tr>
</table>

教学目的与要求：

知识技能目标：

（1）理解函数微分的概念，及其几何意义；

（2）掌握基本初等函数的微分与函数微分的运算法则；

（3）掌握微分在近似运算中的应用。

思政育人目标：

通过第二次数学危机的解决与微分的联系，让学生理解数学史，使学生体会到数学是源于生活的，是对实际问题的抽象产生的，不是脱离实际生活的；引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯；培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；树立学生实事求是、一丝不苟的科学精神；引导学生运用所学知识揭示生活中的奥秘，在实践中深化认识，达到学以致用的目的。

教学重点及难点：

教学重点：函数微分的概念、函数微分的运算法则

教学难点：微分在近似运算中的应用

应对策略：在讲解定义：微分等于一个线性主部加上一个无穷小量引导学生抓住事物的主要矛盾，无穷小量可以忽略。

作业、讨论题、思考题：

习题 2-5　T3　T4

课后小结：

■ **【教师】简要总结本节课的要点**

本节课学习了微分的定义和几何意义、基本初等函数的微分与函数微分的运算法则、函数的近似计算和误差估计的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

■ **【学生】总结回顾知识点**

■ **教学反思**

本节课发现部分学生缺乏练习，无法将所学知识很好地应用到题目中。在今后的教

学中应更加注重课堂练习环节的作用，将其与平时成绩紧密结合，让学生自主参与，消除学生的惰性，培养学生良好的学习习惯。

下节课预习重点：

微分中值定理

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段

知识讲解

45M

【教师】讲解微分的定义

例 1　一块正方形金属薄片，由于温度的变化，其边长由 x_0 变为 $x_0+\Delta x$，如图 2-4 所示，此时薄片的面积改变了多少？

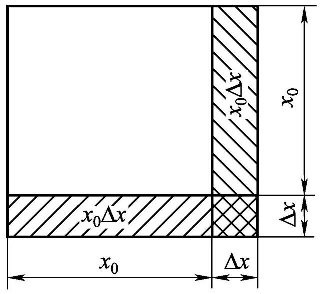


图 2-4

解　设此薄片的边长为 x，面积为 A，则 $A=x^2$.

当自变量 x 在 x_0 有改变量 Δx 时，相应的面积函数有改变量 ΔA，则

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2 .$$

从图中可以看出，ΔA 由两部分组成：一部分是 $2x_0\Delta x$（Δx 的线性函数），为图中两个矩形的面积，它是 ΔA 的主要组成部分（Δx 很小时）；另一部分是 $(\Delta x)^2$，为图中小正方形的面积，当 Δx 很小时，这部分可以忽略不计（$(\Delta x)^2$ 是 Δx 的高阶无穷小）．所以，当 Δx 很小时，

$$\Delta A\approx 2x_0\cdot\Delta x .$$

这表明，正方形金属薄片面积的改变量可近似地用 Δx 的线性函数部分来代替，其误差 $(\Delta x)^2$ 是 Δx 的高阶无穷小．由此产生了微分概念．

定义 1　设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，Δx 为自变量改变量，x_0 和 $x_0+\Delta x$ 都在 $U(x_0)$ 内，若 Δx 产生的函数改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示成 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$（$A$ 是不依赖于 Δx 的常数），即 Δy 可用 Δx 的线性函数 $A\cdot\Delta x$ 加 Δx 的高阶无穷小量表示，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点**可微**． $A\Delta x$ 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 相应于 Δx 的**微分**，记作 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}$，即 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}=A\Delta x$.

一般来说，如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微，则存在常数 A，使

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),$$

这样就有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$．令 $\Delta x\to 0$，得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A$，所以，

$A=f'(x_0)$．故若 $f(x)$ 在 x_0 点可微，则 $f(x)$ 在 x_0 点一定可导，且

讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法

学习微分的定义和几何意义。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

$\mathrm{d}y|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$.

反之，若 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)+\alpha(\Delta x)\text{（其中 }\alpha(\Delta x)\text{ 是 }\Delta x\to 0\text{ 的无穷小量）},$$

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

所以，$f(x)$ 在 x_0 点一定可微.

因此，有如下定理.

定理 1　设函数 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，则 $f(x)$ 在点 x_0 处可微的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x.$$

定理表明，函数在点 x_0 处的可微性与可导性是等价的．因此，可导函数也称为可微函数．函数 $f(x)$ 在任意点 x 处的微分称为函数 $f(x)$ 的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x.$$

当 $f(x)=x$ 时，$\mathrm{d}x=(x')|_{x=x_0}\cdot\Delta x=\Delta x$，即 $\Delta x=\mathrm{d}x$．因此，Δx 可看成自变量本身的微分，因此，函数 $f(x)$ 的微分又可写成 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，从而，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x).$$

因此，导数也称为**微商**.

按以上结果可以得到：

（1）微分计算与导数计算的本质相同；

（2）导数记号 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 就是微分的商；

（3）前面讨论的复合函数求导法则及参变量函数的导数公式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$$

均是微分的代数恒等式.

例 1　求函数 $y=x^3$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 点处的微分.

解　函数 $y=x^3$ 在 $x=1$ 处的微分

$$\mathrm{d}y|_{x=1} = (x^3)'|_{x=1}\cdot\mathrm{d}x = 3x^2|_{x=1}\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{d}x.$$

函数 $y=x^3$ 在 $x=2$ 点处微分

$$dy|_{x=2} = (x^3)'|_{x=2} \cdot dx = 3x^2|_{x=2}\, dx = 12dx = 12dx\ .$$

例 2　分别求函数 $y=\sin x$， $y=\tan x$， $y=e^x$ 的微分.

解　函数 $y=\sin x$ 的微分

$$dy = (\sin x)'dx = \cos x dx\ ;$$

函数 $y=\tan x$ 微分

$$d\tan x = (\tan x)'dx = \sec^2 x dx\ ;$$

函数 $y=e^x$ 微分

$$de^x = (e^x)'dx = e^x dx\ .$$

【学生】理解微分的定义

【教师】讲解微分的几何意义

如图 2-5 所示，设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，在直角坐标系中， MT 是曲线 $f(x)$ 在点 $M_0(x_0,f(x_0))$ 处的切线．对于可微函数 $y=f(x)$ 来说，当 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 是曲线 $f(x)$ 在 x_0 点和 $x_0+\Delta x$ 点纵坐标的增量时，**函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的微分就是曲线 $f(x)$ 在点 M_0 处的切线在 x_0 点和 $x_0+\Delta x$ 点纵坐标的增量，这就是微分的几何意义**.

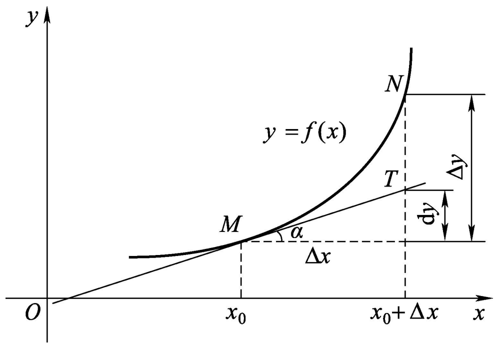


图 2-5

由微分的定义和几何意义可以看出：当 Δx 很小时，$\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x$．在几何上就是函数曲线在局部可用函数的切线段近似代替，这种表示称为非线性函数的局部线性表示．这是微积分学的基本思想方法之一，这种思想方法在自然科学和工程问题的研究中被经常采用.

上述思想方法，在几何上看就是：在 $M_0(x_0,f(x_0))$ 邻近用切线段近似代替曲线段，我们称之为“局部以直代曲”．

【学生】理解微分的几何意义

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **20M**	**【教师】讲解基本初等函数的微分与函数微分的运算法则，并通过例题讲解介绍其应用** 1．基本初等函数的微分公式 由函数微分的定义可知，求函数 $y=f(x)$ 的微分，只需求函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$，再乘自变量的微分 dx 即可．因此，基本初等函数的微分公式如下： （1）$\mathrm{d}(C)=0$ (C 为常数)；（2）$\mathrm{d}(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$ (μ 为常数)； （3）$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$；（4）$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$； （5）$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x$；（6）$\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$； （7）$\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$；（8）$\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x\ (a>0，a\neq 1)$； （9）$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；（10）$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x\ (a>0，a\neq 1)$； （11）$\mathrm{d}(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；（12）$\mathrm{d}(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$； （13）$\mathrm{d}(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；（14）$\mathrm{d}(\mathrm{arc}\cot x)=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$． 2．函数微分的四则运算法则 由于 $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$，因此，微分运算实际就是导数的运算，故可得 $\mathrm{d}[f(x)\pm g(x)]=[f(x)\pm g(x)]'\mathrm{d}x$， $\mathrm{d}[f(x)g(x)]=[f(x)g(x)]'\mathrm{d}x$， $\mathrm{d}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'\mathrm{d}x=\left[\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\right]\mathrm{d}x=\dfrac{f'(x)g(x)\mathrm{d}x-f(x)g'(x)\mathrm{d}x}{g^2(x)}$ $=\dfrac{g(x)\mathrm{d}f(x)-f(x)\mathrm{d}g(x)}{g^2(x)}$． 这样，我们就得到了函数微分的四则运算公式： （1）$\mathrm{d}[f(x)\pm g(x)]=\mathrm{d}f(x)\pm \mathrm{d}g(x)$； （2）$\mathrm{d}[f(x)g(x)]=g(x)\mathrm{d}f(x)+f(x)\mathrm{d}g(x)$；	学习基本初等函数的微分与函数微分的运算法则、微分的应用。 边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

（3）$\mathrm{d}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{g(x)\mathrm{d}f(x)-f(x)\mathrm{d}g(x)}{g^2(x)}$.

3．复合函数的微分法则

复合函数 $y=f(g(x))$ 由 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 复合而成，若 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f(g(x))$ 微分为

$\mathrm{d}f(g(x))=[f(g(x))]'\mathrm{d}x=f'(g(x))g'(x)\mathrm{d}x=f'(g(x))\mathrm{d}g(x)=f'(u)\mathrm{d}u$ 由上式可以看出，无论 u 是中间变量还是自变量，$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 并不改变，这种性质我们称为**一阶微分的形式不变性**．因此，求复合函数的微分可先求中间变量的微分，然后再求中间变量对自变量的微分．例如，$y=\sin(2x+1)$ 是由 $y=\sin u$，$u=2x+1$ 复合而成的，其微分如下：

$\mathrm{d}(\sin(2x+1))=\mathrm{d}\sin u=\cos u\mathrm{d}u=\cos(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)=2\cos(2x+1)\mathrm{d}x$ **例 3**

$y=\ln(1+x+\mathrm{e}^{x^2})$，求 $\mathrm{d}y$．

解 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}[\ln(1+x+\mathrm{e}^{x^2})]=\dfrac{1}{1+x+\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}(1+x+\mathrm{e}^{x^2})$

$$=\frac{1}{1+x+\mathrm{e}^{x^2}}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}\mathrm{e}^{x^2})=\frac{1}{1+x+\mathrm{e}^{x^2}}(\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2)$$

$$=\frac{1}{1+x+\mathrm{e}^{x^2}}(\mathrm{d}x+2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x)=\frac{1+2x\mathrm{e}^{x^2}}{1+x+\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}x\ .$$

例 4 $y=\mathrm{e}^{2x-1}\cos(2x+1)$，求 $\mathrm{d}y$．

解 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}[\mathrm{e}^{2x-1}\cos(2x+1)]=\cos(2x+1)\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x-1}+\mathrm{e}^{2x-1}\mathrm{d}\cos(2x+1)$

$=\cos(2x+1)\mathrm{e}^{2x-1}\mathrm{d}(2x-1)-\mathrm{e}^{2x-1}\sin(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)$

$=2\cos(2x+1)\mathrm{e}^{2x-1}\mathrm{d}x-2\mathrm{e}^{2x-1}\sin(2x+1)\mathrm{d}x$

$=2\mathrm{e}^{2x-1}[\cos(2x+1)-\sin(2x+1)]\mathrm{d}x$.

例 5 设 $x^2y-\mathrm{e}^{2x}=\sin y$，求 $\mathrm{d}y$．

解 对等式两边同时微分得

$$\mathrm{d}(x^2y-\mathrm{e}^{2x})=\mathrm{d}(\sin y)\text{，}$$

$$\mathrm{d}(x^2y)-\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{d}(\sin y)\text{，}$$

即 $2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y-2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\cos y\mathrm{d}y$，

整理得

$$\mathrm{d}y=\frac{2(\mathrm{e}^{2x}-xy)}{x^2-\cos y}\mathrm{d}x\ .$$

例 6　在下列等式左端的括号中填入适当的函数，使等式成立：

（1）$\mathrm{d}(\quad)=x\mathrm{d}x$；（2）$\mathrm{d}(\quad)=\cos\omega x\mathrm{d}x\ (\omega\neq 0)$；

（3）$\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；（4）$\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$．

解　（1）因为 $\mathrm{d}x^2=2x\mathrm{d}x$，所以 $x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x^2=\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)$，所以

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)=x\mathrm{d}x.$$

又由于 $\mathrm{d}C=0$，因此有

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2+C\right)=x\mathrm{d}x\ (C\text{ 为任意常数}).$$

同理可得

（2）$\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{\omega}\sin\omega x+C\right)=\cos\omega x\mathrm{d}x$；

（3）$\mathrm{d}(\sqrt{x}+C)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

（4）$\mathrm{d}(\ln x+C)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$．

【学生】掌握基本初等函数的微分与函数微分的运算法则

【教师】讲解函数的近似计算和误差估计

【教师】组织学生讨论以下问题

问题讨论 10M

1．解释函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点可微与在 x_0 点连续的关系，并说明理由．

2．函数的微分与导数的概念有何区别与联系？由导数定义能推出微分定义吗？反之如何？

3．微分用于函数值的近似计算有何优点与缺点？

【学生】讨论、发言

课堂检测 10M

【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况

【学生】做测试题目

【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程

【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧

课堂小结 5 M

【教师】简要总结本节课的要点

本节课学习了微分的定义和几何意义、基本初等函数的微分与函数微分的运算法则、函数的近似计算和误差估计的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

【学生】总结回顾知识点

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 9 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 11 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">授课题目（教学章、节或主题）： 第三章 微分中值定理与导数的应用
第一节 微分中值定理</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）理解罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理及其应用；
（2）掌握这三个定理的简单应用。
思政育人目标：
通过学习罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理及其应用，让学生体会国内外数学家追求科学道路的艰辛，培养学生坚韧的意志，激励学生努力学习，培养创新精神，锲而不舍，刻苦钻研的数学精神。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学重点及难点：
教学重点：罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理的证明过程
教学难点：罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理的应用
应对策略：首先证明出结论，再用引申的例子去完善如何应用的具体过程。若题干只出现了连续，则使用最值定理+介值定理；若有开区间可导，则是微分中值定理；若是证明函数等于零，首先观察是否有原函数（是否存在导函数），若存在则考虑使用罗尔中值定理；若出现二阶导函数，则考虑使用多次罗尔中值定理；若题目中不存在导函数或者不存在原函数，则考虑使用零点定理；若出现单侧极限，则使用费马引理；拉格朗日定理和柯西中值定理考验观察力，柯西中值定理较为简单；若出现多个一阶导函数，则考虑使用多次拉格朗日定理；出现一阶导函数的不等式也是拉格朗日定理；拉格朗日定理较难，一般把所有方法排除后再往拉格朗日定理方向凑；首先把一个变量的移项凑到一边，这样就比较容易构造函数；若出现超过二阶或者二阶不等式（多个拉格朗日定理）的导函数，一定是带拉格朗日定理的余项泰勒展开。</td></tr>
<tr><td colspan="6">作业、讨论题、思考题：
习题 3-1 T2（2）（3） T3</td></tr>
</table>

课后小结：

■【教师】简要总结本节课的要点

本节课学习了罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

■【学生】总结回顾知识点

■教学反思

本节课取得了较好的教学效果，在课堂测试环节针对学生练习中出现的问题进行了细致的辅导，为学生解决了很多以前没有弄懂的问题，并从中发现了一些教学中的盲点，后面的教学中会针对这些问题进行具体讲解。

下节课预习重点：

洛必达法则

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 45M	见下文	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法 学习罗尔中值定理及其证明过程。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

【教师】讲解罗尔中值定理及其证明过程，并通过例题介绍其应用

费马引理 设 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内有定义，且在 x_0 点处可导，如果对任意的 $x \in U(x_0)$，都有 $f(x) \leq f(x_0)$ 或 $f(x) \geq f(x_0)$，则 $f'(x_0)=0$.

证明 不妨设 $x \in U(x_0)$ 时，$f(x) \leq f(x_0)$（$f(x) \geq f(x_0)$ 可以类似地证明）. 那么，当 $x < x_0$ 时有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0,$$

当 $x > x_0$ 时有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0.$$

由 $f(x)$ 在 x_0 处可导及函数极限的保号性得

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{x \to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0,$$

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{x \to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0,$$

所以 $f'(x_0)=0$.

费马引理的几何意义如图 3-1 所示：若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 是局部最高点或局部最低点，则曲线在该点处必有水平切线.

定理 1（罗尔中值定理） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

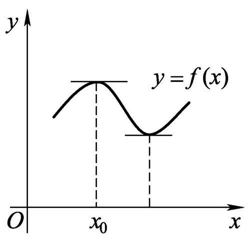


图 3-1

证明 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，根据闭区间上连续函数的最值定理可知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m . 这样，有以下两种可能的情形：

（1）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $M=m$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数，函数在 (a,b) 内任意点的导数为 0；

（2）若 $M\neq m$，由于 $f(a)=f(b)$，M 与 m 至少有一个值在 (a,b) 内取得．现设 $M\neq f(a)$（$m\neq f(a)$ 证法类似），则必存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=M$（或 m）．因此对任意 $\xi\in(a,b)$，都有 $f(\xi)\bullet M$，由费马定理知 $f'(\xi)=0$．

罗尔定理的几何意义：对闭区间 $[a,b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$，当两端点连线为水平直线时，在开区间 (a,b) 内至少有一点具有水平切线，如图 3-2 所示．

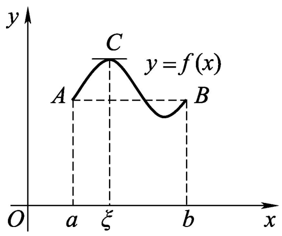


图 3-2

例 1　验证函数 $f(x)=x^2-4x+3$ 在区间 $[1,3]$ 上满足罗尔定理的条件，并求点 ξ，使 $f'(\xi)=0$．

证明　因为 $f(x)$ 是初等函数，所以 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续，在 $(1,3)$ 内可导，且 $f(1)=f(3)$，故其满足罗尔定理的三个条件．

又因为 $f'(x)=2x-4=2(x-2)$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=2$，$2\in(1,3)$，所以 $\xi=2$．

例 2　证明 $f(x)=x(x-2)(x-4)(x-6)+1$ 的导函数 $f'(x)$ 有 3 个零点分别位于区间 $(0,2)$，$(2,4)$，$(4,6)$ 内．

证明　因为 $f(x)$ 在 **R** 上连续可导，且 $f(0)=f(2)=f(4)=f(6)=1$，在区间 $[0,2]$，$[2,4]$，$[4,6]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi_1\in(0,2)$，$\xi_2\in(2,4)$，$\xi_3\in(4,6)$，使得 $f'(\xi_1)=0$，$f'(\xi_2)=0$，$f'(\xi_3)=0$．所以 ξ_1，ξ_2，ξ_3 是 $f'(x)$ 的三个零点．

课时分配	教 学 内 容	方法及手段

知识讲解

30M

【教师】讲解拉格朗日中值定理及其证明过程，并通过例题介绍其应用

定理 2（拉格朗日中值定理）　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$．

分析　如图 3-3 所示，拉格朗日中值定理实际是让我们证明曲线 $f(x)$ 上存在一点 $(\xi,f(\xi))$，使其切线平行于 A，B 点所在直线 $l(x)$，即

$$f'(\xi)-l'(x)=0\quad（l'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}），$$

$$f'(\xi)-l'(x)=0\Rightarrow[f(x)-l(x)]'_{x=\xi}=0\ .$$

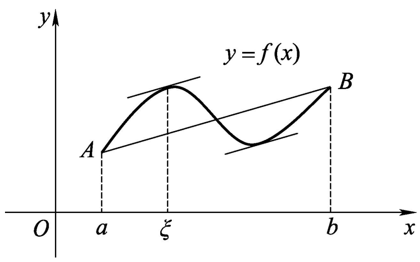


图 3-3

因此，只要证明 $f(x)-l(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔中值定理条件，即可证明拉格朗日中值定理成立．

证明　易知 A，B 点所在直线方程为

$$l(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\ .$$

令 $F(x)=f(x)-l(x)=f(x)-\left[f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$，

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，并且

$$F(a)=f(a)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)\right]=f(a)-f(a)=0$$

$F(b)=f(b)-\left[f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)\right]=f(b)-[f(a)+f(b)-f(a)]=0$ 所以

$F(a)=F(b)$，由罗尔中值定理知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$．而

学习拉格朗日中值定理、柯西中值定理。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

$F'(x)=f'(x)-\left[f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$所以

$f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$，即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日中值定理的几何意义：如果过连续曲线 $f(x)$ 上除端点外的其他点有不垂直于 x 轴的切线，那么这条曲线上除端点外至少存在一点，使过该点的切线平行于区间两端点的连线.

显然，对于拉格朗日中值定理的条件，若进一步使得 $f(a)=f(b)$，则拉格朗日中值定理即为罗尔定理，这说明罗尔中值定理是拉格朗日中值定理的特殊情况.

例 3　验证函数 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ 在区间 $[0,3]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，并求出定理中的 ξ.

证明　显然 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，故其满足拉格朗日中值定理的条件．又因为

$$f'(x)=3x^2-12x+11,$$

则 $\dfrac{f(3)-f(0)}{3}=2=3\xi^2-12\xi+11$，

解得 $\xi_1=1$，$\xi_2=3$（舍去）.

作为拉格朗日中值定理的应用有如下推论.

推论　若 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零，则 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

证明　在区间 I 上任取两点 x_1，x_2 ($x_1<x_2$)，应用拉格朗日中值定理得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\ (x_1<\xi<x_2).$$

假设 $f'(\xi)=0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)=0$，而 x_1，x_2 在区间 I 上的选取是任意的，因此 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

例 4　证明 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$，$x\in(-1,1)$.

证明　设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，则

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0,\quad x\in(-1,1),$$

所以 $f(x)\equiv C$，$x\in(-1,1)$.

又因为 $f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$，所以 $f(x)=f(0)=\frac{\pi}{2}$，结论得证．

例 5　证明当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证明　设 $f(x)=\ln(1+x)$，显然 $f(x)$ 在区间 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，则

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)x\text{，}\xi\in(0,x)\text{ .}$$

又因为 $f(0)=0$，$f'(x)=\frac{1}{1+x}$，因此

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}\text{ .}$$

而 $0<\xi<x$，所以

$$1<1+\xi<1+x\text{，}$$

不等式两边同时取倒数得

【学生】理解罗尔中值定理是拉格朗日中值定理的特殊情况

【教师】讲解柯西中值定理

定理 3（柯西中值定理）　设函数 $F(x)$，$G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $G'(x)\neq 0$，$x\in(a,b)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}\text{ .}$$

证明　设 $H(x)=F(x)[G(b)-G(a)]-G(x)[F(b)-F(a)]$，因为 $F(x)$，$G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，所以 $H(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$H(a)=F(a)[G(b)-G(a)]-G(a)[F(b)-F(a)]=F(a)G(b)-G(a)F(b)$$
$$H(b)=F(b)[G(b)-G(a)]-G(b)[F(b)-F(a)]=F(a)G(b)-G(a)F(b)$$

所以 $H(a)=H(b)$，$H(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔中值定理条件，故至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $H'(\xi)=0$．又因为

$$H'(x)=F'(x)[G(b)-G(a)]-G'(x)[F(b)-F(a)]\text{，}$$
$$H'(\xi)=F'(\xi)[G(b)-G(a)]-G'(\xi)[F(b)-F(a)]=0\text{ .}$$

又因为 $x\in(a,b)$ 时，$G'(x)\neq 0$，则 $G'(\xi)\neq 0$，

$G(b)-G(a)\neq 0$（$G(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理条件），故

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.$$

若取 $G(x)=x$，则 $G(b)-G(a)=b-a$， $G'(x)=1$，则柯西中值定理变为

$$F(b)-F(a)=F'(x)(b-a)\ (a<\xi<b)，$$

因此，拉格朗日中值定理为柯西中值定理的特殊情况.

【学生】理解拉格朗日中值定理为柯西中值定理的特殊情况

问题讨论

10M

【教师】组织学生讨论以下问题

利用函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0, \\ x, & x \text{ 开} 0\end{cases}$ 说明在区间 $[-1,1]$ 上罗尔定理不成立，在区间 $[-1,2]$ 上拉格朗日中值定理不成立，并阐述理由.

【学生】讨论、发言

课堂小结

5 M

【教师】简要总结本节课的要点

本节课学习了罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

【学生】总结回顾知识点

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 9 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 12 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">授课题目（教学章、节或主题）： 第三章　微分中值定理与导数的应用
第二节　洛必达法则
第三节　泰勒公式</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）掌握使用洛必达法则求函数极限的方法；
（2）理解使用泰勒公式求函数极限的方法。
思政育人目标：
通过学习洛必达法则、泰勒公式及其应用，培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；通过为学生介绍使用洛必达法则和泰勒公式求一些函数的极限的方法，使学生认识到解决问题是需要一定技巧的。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学重点及难点：
教学重点：洛必达法则的相关定理
教学难点：使用洛必达法则求函数极限
应对策略：不经过计算我们无法清楚知道 $\frac{0}{0}$ 未定式的极限到底是 0 还是常数或极限不存在，引导学生体会实践是检验真理的唯一标准。</td></tr>
<tr><td colspan="6">作业、讨论题、思考题：
习题 3-2　T1　T2
习题 3-3　T1　T3</td></tr>
<tr><td colspan="6">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了利用洛必达法则和泰勒公式求函数极限的方法。课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点
■教学反思
本节课效果不错，学生都能积极参与到教学活动中。教学上本着“授之鱼不如授之以渔”的宗旨，注重对学生能力的培养，不仅教他们学习知识，而且让他们在学习过程中学会学习，学会做人。</td></tr>
</table>

下节课预习重点：

函数的单调性与曲线的凹凸性

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

<table>
<tr><th>课时分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及手段</th></tr>
<tr><td>知识讲解
45M</td><td>

【教师】讲解未定式的概念，以及学习洛必达法则的意义

如当 $x\to a$ （或 $x\to\infty$ ）时，两个无穷小量之商与两个无穷大量之商的极限可能存在，也可能不存在，这种极限称为**未定式**，简记为 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$. 洛必达法则是处理未定式极限的重要

工具，是计算 $\frac{0}{0}$ 型、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型及其他类型未定式极限的简单而有

效的方法.

【教师】讲解 $\frac{0}{0}$ 与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式求极限的洛必达法则，并通过例题介绍其应用

定理 1　设 $F(x)$ ， $G(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内有定义，且满足：

（1） $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=0$ ， $\lim\limits_{x\to x_0}G(x)=0$ ；

（2） $F(x)$ ， $G(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内可导，且 $G'(x)\neq 0$ ；

（3） $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{F'(x)}{G'(x)}$ 存在（或为 ∞ ），

那么

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{F'(x)}{G'(x)}.$$

同样，我们可得到如下 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式求极限的洛必达法则.

定理 2　设 $F(x)$ ， $G(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内有定义，且满足：

（1） $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\lim\limits_{x\to x_0}G(x)=\infty$ ；

（2） $F(x)$ ， $G(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内可导，且 $G'(x)\neq 0$ ；

（3） $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{F'(x)}{G'(x)}$ 存在（或为 ∞ ）.

那么

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{F'(x)}{G'(x)}.$$

</td><td>讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法
学习洛必达法则的使用方法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}\ (b\neq 0)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos ax}{b\cos bx}=\dfrac{a}{b}$.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-12x+16}{x^3-2x^2-4x+8}$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-12x+16}{x^3-2x^2-4x+8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-12}{3x^2-4x-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6x}{6x-4}=\dfrac{3}{2}$.

注意，上式中的 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6x}{6x-4}$ 已不是未定式，不能继续应用洛必达法则.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$.

例 4 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$.

例 5 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

解 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$.

结论 $x\to +\infty$ 时，幂函数增大的速度快于对数函数，指数函数增大的速度快于幂函数（由例 4、例 5 得出）.

例 6 求 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$.

解 由于

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x+\cos x}{x}=\lim_{x\to \infty}\frac{1-\sin x}{1}$$

不存在，故不能使用洛必达法则求此极限，但不表示此极限不存在．此极限可用以下方法求得：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)=1+0=1\ .$$

有时求函数极限需先化简求极限的函数，再用洛必达法则求极限，如先进行等价无穷小量替换等．

例 7　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$ ．

分析　这是一个 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式求极限，直接用洛必达法则求极限，会使极限变得更为复杂．可以考虑先使用等价无穷小的替换对极限进行化简，但还要注意等价无穷小替换的使用条件．

解　因为 $\sin x\sim x\,(x\to0)$ ，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}\ .$$

又因为 $\tan x\sim x\,(x\to0)$ ，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}\ .$$

例 8　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ ．

解　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$

【教师】讲解可化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式求极限的洛必达法则，并通过例题介绍其应用

一些未定式如 $\infty\cdot0$， $\infty-\infty$， $x-x_0$， 1^∞， ∞^0 型，可化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式求极限．

例 9　求 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$ ．

解　这是一个 $0\cdot\infty$ 型未定式，可化为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式求极限．

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0\ .$$

例 10　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$.

解　这是 $\infty-\infty$ 型未定式，通常可以用通分或有理化等方法将其化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式求极限.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x},$$

因为 $\mathrm{e}^x-1\sim x\,(x\to 0)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

例 11　求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

解　这是 $\infty-\infty$ 型未定式，可化为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式求极限.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln[1+(x-1)]},$$

因为 $\ln[1+(x-1)]\sim x-1\,(x\to 1)$，所以

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}.$$

例 12　求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.

解　这是一个 0^0 型未定式，可化为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式求极限.

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\ln x^x}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{x\ln x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)}=\mathrm{e}^0=1$$

<table>
<tr><td>课时分配</td><td>教 学 内 容</td><td>方法及手段</td></tr>
<tr><td>知识讲解

30M</td><td>

【教师】讲解泰勒公式，并通过例题讲解介绍其应用

泰勒中值定理 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数， $x_0 \in (a,b)$ ，则对 $\forall x \in (a,b)$ 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \quad (3\text{-}1)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \text{（}\xi\text{ 介于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间）}. \quad (3\text{-}2)$$

证明 显然

$$R_n(x)=f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right],$$

由于 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数，所以 $R_n(x)$ 在 (a,b) 内也具有 $n+1$ 阶导数，且 $R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$ ．要证 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ 介于 x_0 与 x 之间），只要证 $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ 即可.

$$\text{由于 }\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}}$$

中对函数 $R_n(x)$ 及 $(x-x_0)^{n+1}$ 在以 x_0 与 x 为端点的区间上应用柯西中值定理有

$$\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} \text{（}\xi_1\text{ 介于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间），}$$

又因为

$$\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-(n+1)(x_0-x_0)^n}$$

对函数 $R_n'(x)$ 与 $(n+1)(x-x_0)^n$ 在以 x_0 及 ξ_1 为端点的区间上应用柯西中值定理有

</td><td>学习泰勒公式。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

$$\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-(n+1)(x_0-x_0)^n}=\frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}}$$（ξ_2 介于 x_0 与 ξ_1 之间），

依此类推，应用 $n+1$ 次柯西中值定理后得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{(n-1)}}=\cdots=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$（ξ 介于 x_0 与 ξ_n 之间），

即 $\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\dfrac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$，而 $R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$，故

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$（ξ 介于 x_0 与 ξ_n 之间），

定理得证.

式（3-1）称为函数 $f(x)$ 按 $(x-x_0)$ 的幂展开的**带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式**．$R_n(x)$ 表达式即式（3-2）称为**拉格朗日型余项**.

例 1　计算无理数 e 的近似值，使其误差不超过 10^{-6}.

解　e^x 的麦克劳林公式为

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)\ (0<\theta<1)，$$

所以 $e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{e^\theta}{(n+1)!}$.

要使 $e-\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)=\dfrac{e^\theta}{(n+1)!}<10^{-6}$，只要

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!}<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}<10^{-6}\ (e<3)，$$

即 $(n+1)!>3\times10^6$，解得 $n\geqslant 9$．所以，当 $n=9$ 时，

$$e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{9!}，$$

计算得 $e\approx2.718\,282$，其误差不超过 10^{-6}.

用同样的方法，可以通过 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林公式计算出 $\ln2$，$\ln3$ 设定精度的近似值.

问题讨论 10M

【教师】组织学生讨论以下问题

给出求函数马克劳林公式的一般方法．说明在一定精度要求下，用函数马克劳林公式近似计算函数值的方法.

【学生】讨论、发言

课堂小结 5 M

【教师】简要总结本节课的要点

本节课学习了利用洛必达法则和泰勒公式求函数极限的方法。课后大家要多加练习，巩固认知。

【学生】总结回顾知识点

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 10 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 13 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
</table>

授课题目（教学章、节或主题）： 第三章　微分中值定理与导数的应用
第四节　函数的单调性与凹凸性

教学目的与要求：

知识技能目标：

（1）掌握函数单调性的判断；

（2）掌握曲线凹凸性、凹凸区间和拐点的判定。

思政育人目标：

函数的凹凸性意味着函数的图像是起起伏伏的，也如我们的人生。人生的道路不可能一帆风顺，难免会出现起起伏伏，会有高峰，也会有低谷，但是高峰和低谷都是暂时的。处于低谷的自己，要触底反弹，多鼓励自己，想尽办法走出困境；处于高峰的自己，要居安思危，学会自我反省，避免安于现状，被优胜劣汰。

教学重点及难点：

教学重点：函数单调性定理，凹凸性和拐点的定义

教学难点：函数单调性的判断

应对策略：在讲解“曲线凹凸性”这一内容时，可从如下案例引入。港珠澳大桥横穿大海，宛若一条长龙飞向天际。这条长桥是中国从桥梁大国走向桥梁强国的里程碑之作，被称为“现代世界七大奇迹”之一。可以将桥抽象成一条曲线，研究这条曲线的常见特性。

作业、讨论题、思考题：

习题 3-4　T1　T2

课后小结：

■**【教师】简要总结本节课的要点**

本节课学习了函数单调性的判别法和函数的凹凸性与拐点的方法。课后大家要多加练习，巩固认知。

■**【学生】总结回顾知识点**

■**教学反思**

本节课效果不错，学生都很积极地参与到教学活动中。在教学过程中，通过对例题的分析，使学生理解到数学活动是一种积极的思维活动和探索行为，是同化，是探

索，是发现，是再创造，是与实际应用紧密联系的科学。

下节课预习重点：

函数的极值与最大值最小值

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

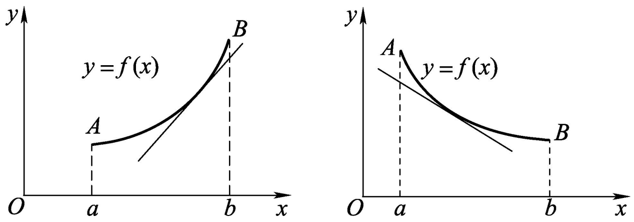
【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段

【教师】讲解函数单调性的判别法，并通过例题介绍其应用

如果函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加或单调减少，那么它的图形是沿着 x 轴正向上升或下降的曲线．这时曲线上各点的切线斜率是非负的或非正的，即 $y'=f'(x)\geqslant 0$，如图 3-4（a）所示，或 $y'=f'(x)\leqslant 0$，如图 3-4（b）所示．由此可见，函数的单调性与导数的符号有密切的联系．



（a）　　（b）

图 3-4

定理 1　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则下列结论成立：

（1）若在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增；

（2）若在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减．

例 1　判定函数 $y=x+x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的单调性．

解　因为在 $(-\infty,+\infty)$ 上，$f'(x)=1+3x^2>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调递增的．函数的图像如图 3-5 所示．

例 2　讨论函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性．

解　函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$．当 $x\neq 0$ 时，$y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$；当 $x=0$ 时，函数导数不存在．由于在 $(-\infty,0)$ 内 $y'<0$，在 $(0,+\infty)$ 内 $y'>0$，所以 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $(-\infty,0)$ 内是单调递减的，在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的．函数的图像如图 3-6 所示．

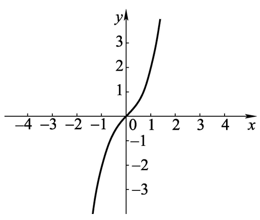


图 3-5

知识讲解

45M

讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法

学习洛必达法则的使用方法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

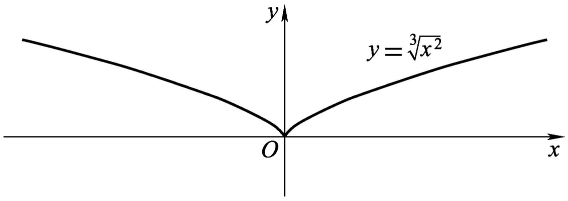


图 3-6

由例 1、例 2 可以看出，函数单调区间发生改变的分界点一般为导数为 0 的点或导数不存在的点．因此，讨论函数的单调性，只要求出函数导数为 0 的点和导数不存在的点，利用这些点把函数的定义域分成几个区间，就可在每个区间上判断函数的单调性．

例 3　确定函数 $y=x^3-2x^2+x-1$ 的单调区间．

解　函数 $y=x^3-2x^2+x-1$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

$$y'=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)\text{ .}$$

令 $y'=0$，有 $(3x-1)(x-1)=0$，得 $x=\dfrac{1}{3}$ 或 $x=1$． $x=\dfrac{1}{3}$， $x=1$ 把函数定义域分成三个区间 $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$， $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$， $(1,+\infty)$，且在区间 $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$ 内 $y'>0$，在区间 $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$ 内 $y'<0$，在区间 $(1,+\infty)$ 内 $y'>0$．

因此，函数 $y=x^3-2x^2+x-1$ 在区间 $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\dfrac{1}{3},1\right]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增．函数的图像如图 3-7 所示．

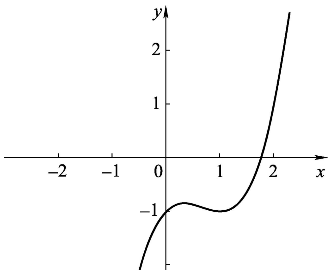


图 3-7

例 4　确定函数 $f(x)=\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+2$ 的单调区间．

解　函数 $f(x)=\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$．由于

$$f'(x)=x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}=\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\ (x\neq 0)\text{，}$$

所以 $x=1$ 时，函数的导数为 0； $x=0$ 时，函数导数不存在．函数导数为 0 点与导数不存在的点将函数的定义域分成三个区间 $(-\infty,0)$，$(0,1)$ $(1,+\infty)$，且当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $f'(x)<0$；当 $x\in(0,1)$ 时， $f'(x)<0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$．因此，$f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少，在 $[0,1]$ 上单调减少，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增．函数的图像如图 3-8 所示．

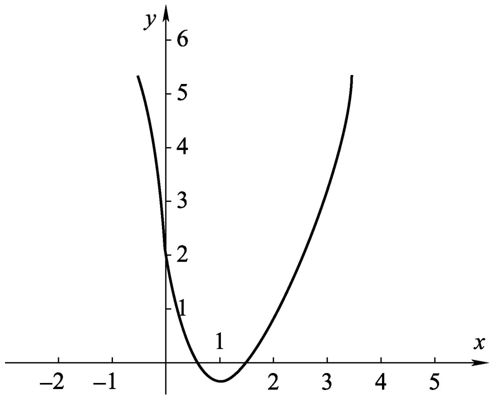


图 3-8

结论　一般地，如果函数 $f(x)$ 在某区间的有限个点导数为 0 或导数不存在，在其余点的导数均为正（或负），则 $f(x)$ 在该区间上仍是单调递增（或递减）的．

利用函数的单调性，还可证明一些不等式．

例 5　证明不等式 $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}\ (x>0)$．

证明　设 $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且可导，

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}>0,$$

因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，故

$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>f(0)=0$，即 $1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>0$，所以

$$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}\ (x>0).$$

【学生】掌握函数单调性的判别法

<table>
<tr><td>课时分配</td><td>教 学 内 容</td><td>方法及手段</td></tr>
<tr><td>知识讲解
40M</td><td>

【教师】讲解函数的凹凸性与拐点，并通过例题讲解介绍其应用

函数的单调性反映了函数曲线在区间上的递增或递减情况，但它不能反映函数曲线在这一区间上的弯曲方向．如图 3-9 所示，函数曲线 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都是递增的，但弯曲方向不同，曲线 $f(x)$ 是“上凸”的，曲线 $g(x)$ 是“下凹”的，下面给出描述曲线弯曲方向的曲线凹凸性定义．

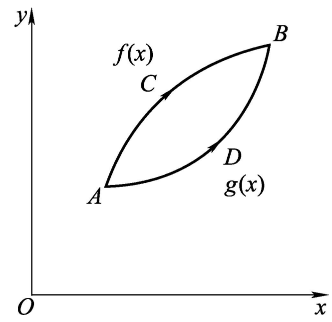


图 3-9

定义 1　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，若对 $\forall x_1, x_2 \in I$，恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，那么称 $f(x)$ 在区间 I 上的图形是凹的；若恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，那么称 $f(x)$ 在区间 I 上图形是凸的．

定义 1 的实际意义是：在区间 I 上函数曲线任意两点间的部分，若位于这两点连线下方，则曲线是凹的；若位于这两点连线上方，则曲线是凸的．

关于函数曲线的凹凸性，有如下判定定理：

定理 2　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数，若在 (a,b) 内 $f''(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上的图形是凹的；若在 (a,b) 内 $f''(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上的图形是凸的．

证明　若在区间 (a,b) 内 $f''(x) > 0$，我们证函数 $f(x)$ 曲线在 $[a,b]$ 上的凹性．对 $\forall x_1, x_2 \in I$，不妨设 $x_1 < x_2$，要证 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，只要证

$$f(x_1)+f(x_2)-2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > 0 .$$

</td><td>学习泰勒公式。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

事实上，由于

$f(x_1)+f(x_2)-2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\left[f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]-\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)\right]$ 在区间 $\left[x_1,\frac{x_1+x_2}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{x_1+x_2}{2},x_2\right]$ 上应用微分中值定理，$\exists\xi_1\in\left(x_1,\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，$\exists\xi_2\in\left(\frac{x_1+x_2}{2},x_2\right)$，使得

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)=f'(\xi_1)\frac{x_2-x_1}{2},$$

$$f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f'(\xi_2)\frac{x_2-x_1}{2},$$

所以

$f(x_1)+f(x_2)-2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f'(\xi_2)\frac{x_2-x_1}{2}-f'(\xi_1)\frac{x_2-x_1}{2}=[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]\frac{x_2-x_1}{2}$ 将 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用微分中值定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得

$$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=f''(\xi)(\xi_2-\xi_1),$$

所以

$$f(x_1)+f(x_2)-2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)\frac{x_2-x_1}{2},$$

因为 $f''(x)>0,\xi_2>\xi_1,x_2>x_1$，所以

$f(x_1)+f(x_2)-2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>0$，即

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

这就证明了 $f(x)$ 曲线在 $[a,b]$ 上是凹的.

例 6　判定曲线 $y=\ln x+1$ 的凹凸性.

解　$y=\ln x+1$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. 因 $y'=\frac{1}{x}$，$y''=-\frac{1}{x^2}$，在 $(0,+\infty)$ 内 $y''<0$，故曲线 $y=\ln x+1$ 在 $(0,+\infty)$ 内是凸的.

例 7　判定曲线 $y=x^3+4x+4$ 的凹凸性.

	解　$y=x^3+4x+4$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$．因 $y'=3x^2+1$，$y''=6x$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$y''<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$y''>0$．所以曲线 $y=x^3+4x+4$ 在 $(-\infty,0)$ 上是凸的，在 $(0,+\infty)$ 内曲线是凹的． 定义 2　若曲线 $f(x)$ 经过点 $(x_0,f(x_0))$ 时凹凸性发生改变，那么称点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $f(x)$ 的拐点． 从上面的定理可知，由 $f''(x)$ 的符号可以判定曲线的凹凸性，进一步地，如果 $f''(x)$ 在 x_0 左右两侧异号，那么 $(x_0,f(x_0))$ 就是曲线的一个拐点．函数曲线的拐点一般出现在函数二阶导数为 0 的点和二阶导数不存在的点． 例 8　求曲线 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 的拐点及凹凸区间． 解　函数 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且 $$y'=6x^2+6x-12,\quad y''=12x+6=12\left(x+\frac{1}{2}\right).$$ 令 $y''=0$，得 $x=-\frac{1}{2}$，它把定义域 $(-\infty,+\infty)$ 分成两部分，现做如下讨论，如表 3-1 所示． 表 3-1 见下表 因此，$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 是函数曲线的凸区间，$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ 是函数曲线的凹区间，点 $\left(-\frac{1}{2},20\frac{1}{2}\right)$ 是函数曲线的拐点．	
课堂小结 5 M	**【教师】简要总结本节课的要点** 本节课学习了函数单调性的判别法和函数的凹凸性与拐点的方法。课后大家要多加练习，巩固认知。 **【学生】总结回顾知识点**	

表 3-1

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$
y''	−	0	+
y	凸	$20\frac{1}{2}$	凹

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 10 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 14 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">授课题目（教学章、节或主题）： 第三章 微分中值定理与导数的应用
第五节 函数的极值与最大值最小值</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）掌握函数极值的求法；
（2）掌握函数最值的求法，及其在实际问题中的应用。
思政育人目标：
通过讲解函数最值：告诉学生不要只看到眼前的利益，而是从全局考虑，具有大局观，切勿焦躁。函数极值：“横看成岭侧成峰，远近高低各不同”，带入画面感，人的一生会经历高峰，也会跌入谷底，顺境不骄不躁，逆境放平心态，勇往直前，风雨过后就是彩虹。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学重点及难点：
教学重点：函数极大值和极小值的定义、第一充分条件和第二充分条件
教学难点：函数极值的和最值的求法
应对策略：用一阶导数求（第一充分条件）；二阶导数求(第二充分条件)；根据定义求；利用泰勒公式结合前述各法判别，并求出极值；利用基本结论。 函数最值求法：函数值比较法；单侧极限比较法；连续函数的唯一的极值点就是它的最值点。</td></tr>
<tr><td colspan="6">作业、讨论题、思考题：
习题 3-5 T1 T3</td></tr>
<tr><td colspan="6">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了函数极值及求法、函数的最大值与最小值及其求法，及其在实际问题中的应用。课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点
■教学反思
本节课效果不错，每个学生都积极参与到教学活动中。在教学中分析了学生的特点，根据不同学生的学习情况采用了灵活多样的教学方法，使不同层次的学生都能无障</td></tr>
</table>

碍地接受所讲新知，达到了预期的教学效果。

下节课预习重点：

图形的描绘

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 45M	（见下）	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法 学习极值的求法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

【教师】讲解函数极值及求法，并通过例题介绍其应用

定义 1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果对任意的 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$，有 $f(x) < f(x_0)$（或 $f(x) > f(x_0)$），则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的**极大值（极小值）**，x_0 称为**极大值点（极小值点）**.

函数的极大值与极小值统称为函数的**极值**，使函数取得极值的点称为**极值点**.

定理 1（第一充分条件） 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域 $U(x_0, \delta)$ 上连续，且在去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 内可导，则下列结论成立：

（1）若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) > 0$，$x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 点取得极大值；

（2）若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) < 0$，$x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

（3）若 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时，$f'(x)$ 为正（或为负），则 $f(x)$ 在 x_0 处不能取得极值.

例 1 求函数 $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，且 $x \neq -1$ 时，

$$f'(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \frac{2(x-4)}{3\sqrt[3]{x+1}} = \frac{5x-5}{3\sqrt[3]{x+1}}.$$

令 $f'(x) = 0$，得驻点 $x = 1$，$x = -1$ 是函数的不可导点，它们把定义域分成三部分，现列表做如下讨论，如表 3-4 所示.

表 3-4

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$-3\sqrt[3]{4}$	↗

所以，极大值为 $f(-1) = 0$，极小值为 $f(1) = -3\sqrt[3]{4}$

例 2 求函数 $f(x) = 1 - (x-2)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，且 $x \neq 2$ 时

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}.$$

显然，$f(x)$ 没有驻点，$x=2$ 是函数的不可导点，它把定义域分成两部分，现列表做如下讨论，如表 3-5 所示.

表 3-5

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−
$f(x)$	↗	1	↘

所以 $f(x)$ 的极大值是 $f(2)=1$，没有极小值.

如果函数 $f(x)$ 在其驻点 x_0 处存在二阶导数 $f''(x_0)$，且 $f''(x_0)\neq 0$，我们可以利用下述定理判别函数 $f(x)$ 在驻点处取得极值.

定理 2（第二充分条件） 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

证明 因为 $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$，所以若 $f''(x_0)<0$，由极限保号性知，存在 x_0 的邻域 $U(x_0,\delta)$，使 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，$\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0$．又因为 $f'(x_0)=0$，所以 $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$，

当 $x\in(x-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，由定理 1 可知 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点．同理可证，若 $f''(x_0)>0$，x_0 是 $f(x)$ 的极小值点.

例 3 求函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 的极值.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2},\quad f''(x)=\frac{2}{x^3}.$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1$，$x_2=1$．又 $f''(-1)=-2<0$，$f''(1)=2>0$，所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=-2$，极小值为 $f(1)=2$.

例 4 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在任意阶导数，故其极值点只能在驻点取得．由 $f'(x)=6x(x^2-1)^2$，令 $f'(x)=0$，得驻点，$x_1=-1$，$x_2=0$，$x_3=1$.

由 $f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$，可知

$$f''(0)=6>0,\quad f''(-1)=f''(1)=0.$$

由定理 2 知，$x=0$ 是极小值点，极小值为 $f(0)=0$．由于 $f''(-1)=f''(1)=0$，故定理 2 无法判别 $x_1=-1$，$x_3=1$ 是否是极值点．由 $f'(x)=6x(x^2-1)^2$ 可知 $f'(x)$ 的正负由 x 决定，故 $x=-1$ 时，在其邻域内所有点都使 $f'(x)<0$；$x=1$ 时，在其邻域内所有点都使 $f'(x)>0$．由定理 1 可知 $x_1=-1$，$x_3=1$ 不是函数的极值点.

<table>
<tr><th>课时分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及手段</th></tr>
<tr><td>知识讲解
40M</td><td>

【教师】讲解函数的最大值与最小值，并通过例题介绍其应用

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定能取得最大值与最小值．

函数的最值可能在区间的端点上取得，也可能在区间内部取得．如果最值点在区间的内部，则它必为极值点．因此，求闭区间 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的最值可按下列步骤进行：

（1）计算 $f'(x)$，找出函数在 (a,b) 内所有的驻点和不可导点；

（2）计算函数在驻点、不可导点和区间端点处的值；

（3）将上述函数值进行比较，其中最大、最小者就是函数在区间 $[a,b]$ 上的最大、最小值．

例 5　求函数 $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 在 $[-1,8]$ 上的最大值与最小值．

解　$f'(x)=1-x^{-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}$．

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=1$，由导数的定义知 $x=0$ 是函数的不可导点．由于 $f(-1)=-\frac{5}{2}$，$f(0)=0$，$f(1)=-\frac{1}{2}$，$f(8)=2$，所以函数 $f(x)$ 在 $[-1,8]$ 上的最大值是 $f(8)=2$，最小值是 $f(-1)=-\frac{5}{2}$．

例 6　要造一圆柱形油罐，体积为 V_0，问底面半径 r 和高 h 为多少时，才能使表面积最小？这时底面直径与高的比是多少？

解　设表面积为 A，则 $A=2\pi r^2+2\pi rh$，$V_0=\pi r^2 h$．

由体积公式解出 $h=\frac{V_0}{\pi r^2}$ 代入面积公式可得

$$A=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\frac{V_0}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2V_0}{r}，\quad r\in(0,+\infty)，$$

$$A'=4\pi r-\frac{2V_0}{r^2}=\frac{4\pi r^3-2V_0}{r^2}，$$

当 $A'=0$ 时，得唯一驻点 $r=\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$．

当 $0<r<\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$ 时，$A'<0$；当 $r>\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$ 时，$A'>0$．故 $r=\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$ 时，A 最小，这时 $h=\frac{V_0}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}=2r$，所以，底面直径与高的比是 $2r:h=1:1$．

例 7　某服装商店每天向服装加工厂批发一批服装，批发价为每件 40 元，若零售价定为每件 60 元，估计日销售量为 100 件，如果每件售价降低 1 元，

</td><td>学习最值及应用。
边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

课堂小结 5 M	则每天可多售 10 件，问每件服装零售价为多少元，每天从工厂批发多少件，才可获得最大利润？最大利润为多少？ 解　设每件售价为 x 元（ $x \in [40, 60]$ ），则售出服装件数为 $100+10(60-x)$ ，用 $P(x)$ 表示利润，则 $$P(x)=(x-40)[100+10(60-x)]=-10x^2+1100x-28\,000 .$$ 由 $P'(x)=-20x+1100$ ，得驻点 $x=55$ ．因此，当每件服装售价为 55 元时，利润最大，最大值 $P(55)=(55-40)\times[100+10(60-55)]=2\,250$ (元) ，每天从工厂应批发服装的件数为 $100+10(60-55)=150$ (件) ． **【学生】掌握函数的最大值与最小值的求法** **【教师】简要总结本节课的要点** 本节课学习了函数极值及求法、函数的最大值与最小值及其求法，及其在实际问题中的应用。课后大家要多加练习，巩固认知。 **【学生】总结回顾知识点**	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 10 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 15 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">授课题目（教学章、节或主题）： 第三章　微分中值定理与导数的应用
第六节　函数图形的描绘</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）掌握曲线渐近线的求法；
（2）掌握描绘函数图形的一般步骤。
思政育人目标：
通过学习函数图形的描绘，培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；引导学生运用所学知识揭示生活中的奥秘，在实践中深化认识，达到学以致用的目的。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学重点及难点：
教学重点：函数图形的描绘步骤
教学难点：曲线渐近线的求法
应对策略：首先找垂直渐近线，这只需要找出函数所有的无穷间断点，再分别对趋近正无穷和趋近负无穷求斜渐近线，对趋近正无穷和趋近负无穷这两种情况下渐近线有可能一样，也有可能不一样，还有可能一边有渐近线另一边没有；因此，一般情况下要对两边分别求。当然，如果确定两边的渐近线一样，也可以直接一起求。</td></tr>
<tr><td colspan="6">作业、讨论题、思考题：
习题 3-6　T4　T5</td></tr>
<tr><td colspan="6">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了曲线的渐近线、函数图形的描绘的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点
■教学反思
本节课效果不错，学生基本掌握了课堂中所讲的知识。贴近生活的案例可以将抽象的数学问题直观化，使学生更能体会数学的魅力，在今后的教学过程中，应多准备</td></tr>
</table>

贴近生活的案例，更好地引导学生学习。

下节课预习重点：

曲率

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **45M**	**【教师】讲解曲线的渐近线，并通过例题介绍其求法** 定义 1　如果曲线上的点 M 沿曲线无限远离原点时，M 点到一条直线的距离趋近于 0，则这条直线就称为曲线的渐近线. 渐近线反映了曲线在无限延伸时的变化情况.渐近线可分为三类：水平渐近线、垂直渐近线和斜渐近线．下面给出这三种渐近线的求法. 水平渐近线：若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=C$，则 $y=C$ 是曲线 $f(x)$ 的水平渐近线. 例如，$y=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 是曲线 $y=\arctan x$ 的水平渐近线，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$. 垂直渐近线：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 是曲线 $f(x)$ 的垂直渐近线. 例如，$x=\pm\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$ 是曲线 $y=\tan x$ 的垂直渐近线，因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi}\tan x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+k\pi}\tan x=-\infty$. 斜渐近线：若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线，则有 $$\lim_{x\to\infty}\frac{\lvert kx-f(x)+b\rvert}{\sqrt{1+k^2}}=0$$（点到直线距离公式）. 从而，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0$，这样有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-kx-b}{x}=0$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}-k-\dfrac{b}{x}\right]=0$，所以，$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$．而由 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0$，又得 $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$．因此，求曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线 $y=kx+b$，可通过公式 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$ 求出 k，b. 例如，设曲线 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ 斜渐近线为 $y=kx+b$，那么有	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法 学习曲线的渐近线和函数图形的描绘。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1\text{，}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-x}{x+1}=-1\text{，}$$

所以 $y=x-1$ 是曲线 $y=\frac{x^2}{x+1}$ 的斜渐近线.

例 1　求曲线 $y=\frac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线.

解　因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}=0\text{，}$$

所以 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+2x-3}=\infty$. 故 $y=\frac{x^3}{x^2+2x-3}$ 无水平渐近线.

又因为

$$y=\frac{x^3}{x^2+2x-3}=\frac{x^3}{(x-1)(x+3)}\text{，}$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{x^2+2x-3}=\infty\text{，}\quad\lim_{x\to -3}\frac{x^3}{x^2+2x-3}=\infty\text{.}$$

由此可知 $x=1$，$x=-3$ 是曲线 $y=\frac{x^3}{x^2+2x-3}$ 垂直渐近线.

对于斜渐近线，则有

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2+2x-3)}=1\text{，}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3}=-2\text{，}$$

所以 $y=x-2$ 是曲线 $y=\frac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的斜渐近线.

曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的图像如图 3-11 所示.

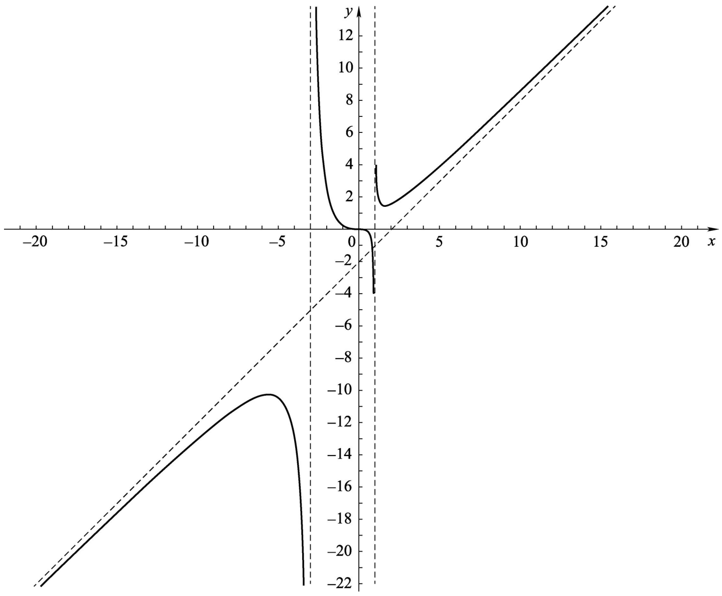


图 3-11

一般来说，函数曲线的垂直渐近线都在函数无定义点取得.

【教师】讲解函数图形的描绘，并通过例题介绍其应用

函数图形描绘的一般步骤如下.

第一步：根据函数的表达式，求函数的定义域和值域，判断函数的奇偶性与周期性，并求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$.

第二步：求出满足 $f'(x)=0$ ， $f''(x)=0$ 的所有点和所有 $f'(x)$ ， $f''(x)$ 不存在的点，通过把这些点由小到大排列，将函数定义域分为以这些点为端点的若干个区间.

第三步：确定在这些区间内 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 的符号，并给出单调区间、凹凸区间、极值点和拐点.

第四步：求函数 $f(x)$ 曲线的渐近线，确定函数图像的延伸状态.

第五步：在坐标上标出 $f'(x)$ ， $f''(x)$ 为 0 的点和不可导点的位置，为了使描图更准确，有时还要补充一些辅助点作图（如特殊点、端点和反映曲线延展的点）.

第六步：根据第三、第四步得到结果，用平滑曲线连接各点作出函数曲线图形.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **30M**	例 2　描绘函数 $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的图形． 解　（1）函数 $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$． （2）$x\neq1$ 时，$y'=\dfrac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$，$y''=\dfrac{2}{(x-1)^3}$；$x=1$ 时，y'，y'' 不存在．令 $y'=0$，得驻点 $x=3$，$x=-1$；$y''\neq0$ $(x\neq1)$，即二阶导数无 0 点． $x=-1$，$x=1$，$x=3$ 将 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 分为四个区间 $(-\infty,-1)$，$(-1,1)$，$(1,3)$，$(3,+\infty)$． （3）在 $(-\infty,-1)$ 内，$y'>0$，$y''<0$，函数是递增凸的；在 $(-1,1)$ 内，$y'<0$，$y''<0$，是递减凸的；在 $(1,3)$ 内 $y'<0$，$y''>0$，是递减凹的；在 $(3,+\infty)$ 内 $y'>0$，$y''>0$，是递增凹的，如表 3-6 所示． 表 3-6 *(table below)* （4）求渐近线． $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}=\infty$，$x=1$ 是垂直渐近线； $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 不存在，无水平渐近线，并且 $$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)^2}{4x(x-1)}=\frac{1}{4},$$ $$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{1}{4}x\right]=-\frac{5}{4},$$	

表 3-6

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	−	不存在	−	0	+
y''	−	$-\dfrac{1}{4}$	−	不存在	+	$\dfrac{1}{4}$	+
y 图形	递增凸	极大值	递减凸	拐点	递减凹	极小值	递增凹

所以，$y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$ 是斜渐近线.

综合以上结果，可画出函数 $y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 图形，如图 3-12 所示.

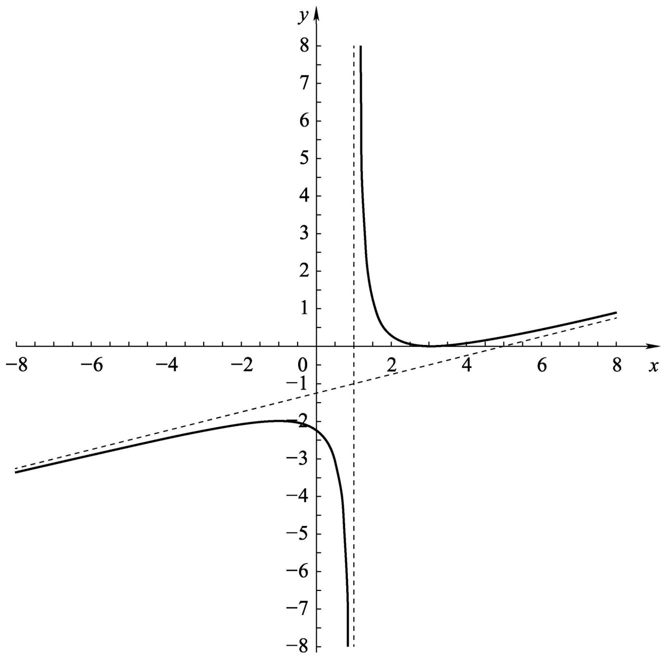


图 3-12

例 3　求曲线 $y=\frac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线.

解　因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}=0\ ,$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+2x-3}=\infty$． 故 $y=\frac{x^3}{x^2+2x-3}$ 无水平渐近线.

又因为

$$y=\frac{x^3}{x^2+2x-3}=\frac{x^3}{(x-1)(x+3)},$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{x^2+2x-3}=\infty\ ,\quad \lim_{x\to -3}\frac{x^3}{x^2+2x-3}=\infty\ .$$

由此可知 $x=1$，$x=-3$ 是曲线 $y=\frac{x^3}{x^2+2x-3}$ 垂直渐近线.

对于斜渐近线，则有

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2+2x-3)}=1\ ,$$

	$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x-3}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3}=-2$ ， 所以 $y=x-2$ 是曲线 $y=\frac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的斜渐近线． 一般来说，函数曲线的垂直渐近线都在函数无定义点取得． **【学生】掌握函数图形的描绘**	
课堂测验 **10M** **课堂小结** **5M**	**【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况** **【学生】做测试题目** **【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程** **【教师】简要总结本节课的要点** 本节课学习了曲线的渐近线、函数图形的描绘、曲率的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。 **【学生】总结回顾知识点**	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 11 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 16 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">授课题目（教学章、节或主题）： 第三章　微分中值定理与导数的应用
第七节　曲率</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）理解曲线弧微分的求法；
（2）掌握曲率的概念及计算公式。
思政育人目标：
通过学习函数图形的描绘及曲率，培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；引导学生运用所学知识揭示生活中的奥秘，在实践中深化认识，达到学以致用的目的。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学重点及难点：
教学重点：曲率的概念
教学难点：曲线弧微分的求法
应对策略：通过工程技术结构中对曲线弯曲程度的研究引出曲率，利用多媒体技术进行展示。</td></tr>
<tr><td colspan="6">作业、讨论题、思考题：
习题 3-7　T1　T5</td></tr>
<tr><td colspan="6">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了曲率的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点
■教学反思
本节课效果不错，学生基本掌握了课堂中所讲的知识。贴近生活的案例可以将抽象的数学问题直观化，使学生更能体会数学的魅力，在今后的教学过程中，应多准备贴近生活的案例，更好地引导学生学习。</td></tr>
<tr><td colspan="6">下节课预习重点：
不定积分的概念和性质</td></tr>
</table>

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

<table>
<tr><th>课时
分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及
手段</th></tr>
<tr><td>知识
讲解
45M</td><td>

【教师】讲解弧微分的概念，并通过例题介绍其应用

如图 3-13 所示，设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有连续导数.

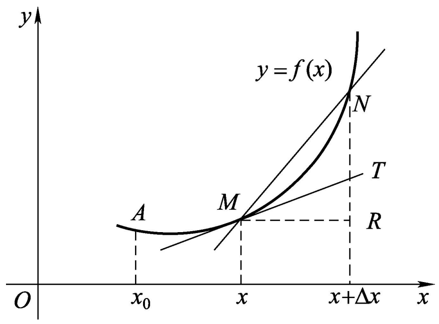


图 3-13

在曲线 $y=f(x)$ 上取定点 A 作为度量弧长的起点，并规定依 x 增大的方向为弧的正向，设 $M(x,y)$ 为曲线上任一点，s 表示曲线 AM 的弧长．显然，弧长 s 由 $M(x,y)$ 确定，因此 s 是 x 的函数，记为 $s=s(x)$，下面我们用函数表示弧长 s 的微分 $\mathrm{d}s$．给定 x 的增量 Δx（$\Delta x=\mathrm{d}x$），相应增量 $\Delta y=RN$，s 有增量 $\overset{\frown}{MN}$，由导数的定义可知

$$s'(x)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overset{\frown}{MN}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overset{\frown}{MN}}{|MN|}\cdot\frac{|MN|}{\Delta x}.$$

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\overset{\frown}{MN}}{|MN|}=\lim\limits_{M\to N}\dfrac{\overset{\frown}{MN}}{|MN|}=1$，又因为

$|MN|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|MN|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}=\sqrt{1+y'^2},$$

故

$$s'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overset{\frown}{MN}}{|MN|}\cdot\frac{|MN|}{\Delta x}=1\cdot\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+y'^2},$$

即

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}.\qquad（3\text{-}7）$$

</td><td>讲授法、
问答法、
讨论法、
演示法、
实践法</td></tr>
</table>

式（3-7）称为函数 $f(x)$ 表示弧长 s 的**弧微分** $\mathrm{d}s$.

例 1　求余弦函数 $y=\sin x$ 的弧微分.

解　由弧微分公式得

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\ .$$

【学生】理解弧微分的概念

【教师】讲解曲率的概念及计算公式，并通过例题介绍其应用

如图 3-14 所示，设曲线上一弧度的长为Δs，在 *M* 点作曲线切线 *MT*，当点 *M* 沿曲线运动到点 *N* 时，切线 *MT* 相应变成 *N* 点切线 *NP*，记切线转过的角度为$\Delta\alpha_1$；而对于与 *MN* 同样弧长的弧（见图 3-15），它比 *MN* 弧弯曲程度大，其切线转过角度为$\Delta\alpha_2$，显然$\Delta\alpha_2>\Delta\alpha_1$. 由此得出结论：当弧长相等时，转角越大，曲线的弯曲程度就越大，可见曲线弯曲程度与转角有关. 但另一方面，若两段弧 MM' 与 NN' 转角相同都是 $\Delta\alpha$（见图 3-16），那么曲线弯曲程度与弧线长短成反比，因此又可得出结论：当转角不变时，弧长越长，曲线的弯曲程度越小，可见曲线弯曲程度还与弧长有关.

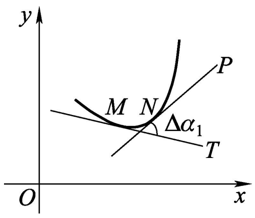


图 3-14

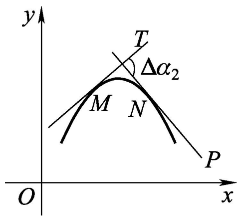


图 3-15

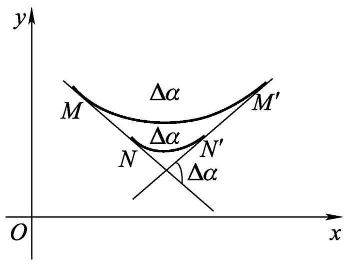


图 3-16

课时分配	教 学 内 容	方法及手段

知识讲解

30M

设曲线 C 是光滑的（每点有切线，切线随切点连续移动），其上点 $M(x,y)$ 对应弧 $s(x)$，在点 M 处切线的倾角为 α，曲线上另外一点 N 对应于弧 $s(x)+\Delta s=s(x+\Delta x)$，在点 N 处切线的倾角为 $\alpha+\Delta\alpha$，则点 M 移动到 N 时切线转过的角度 $|\Delta\alpha|$ 与弧段 $\overset{\frown}{MN}$ 长度 $|\Delta s|$ 的比值称为弧段 $\overset{\frown}{MN}$ 的**平均弯曲程度**，也称弧段 $\overset{\frown}{MN}$ 的**平均曲率**，记作 $\bar{k}$，即

$$\bar{k}=\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}.$$

当 $\Delta s\to 0$ 时（即 $N\to M$ 时），上述平均曲率的极限称为曲线 C 在点 M 处的**曲率**，记作 k，即

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|.$$

例 2　求半径为 R 的圆的曲率.

解　如图 3-17 所示，弧 $\overset{\frown}{AB}$ 长度为 Δs，$|\Delta s|=R\cdot|\Delta\alpha|$，于是

$$\frac{|\Delta s|}{|\Delta\alpha|}=R,$$

所以

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}=\frac{1}{R}.$$

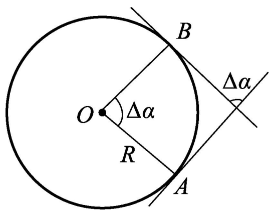


图 3-17

利用曲率的定义计算曲线的曲率是比较困难的，下面研究曲率的计算公式.

设 $y=f(x)$ 二阶可导，前面已求出 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'}\mathrm{d}x$，下面求 $\mathrm{d}\alpha$.

由 $y=f(x)$ 导数的几何意义知 $\tan\alpha=y'$，将 $\tan\alpha=y'$ 两边对 x 求导，得 $\sec^2\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=y''$，则 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{y''}{\sec^2\alpha}=\frac{y''}{1+\tan^2\alpha}=\frac{y''}{1+y'^2}$，于是 $\mathrm{d}\alpha=\frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x$，

再由 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'}\mathrm{d}x$ 可知

$$k=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.\qquad（3\text{-}8）$$

式（3-8）就是曲率的计算公式.

讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法

学习曲率的相关知识及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

例 3　求抛物线 $y=ax^2$ $(a>0)$ 在 $(0,0)$ 点与 $(1,a)$ 点处的曲率，并证明抛物线 $y=ax^2$ 在顶点处曲率最大.

解　因为 $y'=2ax$， $y''=2a$，所以抛物线 $y=ax^2$ $(a>0)$ 上任意点 (x,y) 处曲率为

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2a}{(1+4a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

点 $(0,0)$ 处， $k=2a$；在点 $(1,a)$ 处， $k=\dfrac{2a}{(1+4a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

又因为 $1+4a^2x^2$ 开1，所以

$$k=\frac{2a}{(1+4a^2x^2)^{\frac{3}{2}}} \bullet 2a,$$

所以抛物线 $y=ax^2$ 在顶点处曲率最大，且最大曲率为 $2a$.

【学生】掌握曲率的概念及计算公式

课堂测验 10M

【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况

【学生】做测试题目

【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程

【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧

课堂小结 5M

【教师】简要总结本节课的要点

本节课学习了曲线的渐近线、函数图形的描绘、曲率的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

【学生】总结回顾知识点

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 11 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 17 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">授课题目（教学章、节或主题）： 第四章　不定积分
第一节　不定积分的概念与性质</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）理解原函数与不定积分的概念及其相互关系；
（2）理解不定积分的几何意义；
（3）理解不定积分的基本性质；
（4）熟记基本积分公式。
思政育人目标：
通过引例，引出原函数和不定积分的概念，通过图形介绍不定积分的几何意义，使学生体会到数学是源于生活的；引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯；培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学重点及难点：
教学重点：不定积分的概念和基本性质，不定积分的基本公式
教学难点：不定积分的几何意义
应对策略：通过实例引出不定积分，并对其公式加以证明。</td></tr>
<tr><td colspan="6">作业、讨论题、思考题：
习题 4-1　T1　T2</td></tr>
<tr><td colspan="6">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了原函数与不定积分的概念，不定积分的几何意义，不定积分的基本性质，基本积分公式的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点
■教学反思
本节课效果不错，激发了学生的学习兴趣，并引导学生进行探究。本节课中鼓励学生主动参与活动，使其获取了积极的体验，并让学生主动提出解决问题的途径，教师则扮演学生学习的组织者、参与者、帮助者、引导者和促进者，使学生真正成为学习的主体。</td></tr>
</table>

下节课预习重点：

换元积分法

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

<table>
<tr><td>课时分配</td><td>教 学 内 容</td><td>方法及手段</td></tr>
<tr><td>知识讲解
45M</td><td>

【教师】讲解原函数与不定积分的概念，并通过例题介绍其应用

在运动学中常常会遇到相反的问题，即已知变速直线运动的质点在时刻 t 的瞬时速度

$$v=v(t),$$

求质点的位移函数

$$s=s(t),$$

即已知函数的导数，求原来的函数．这种问题在自然科学和工程技术问题中都普遍存在．为了便于研究，引入以下定义．

定义 1　如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导数为 $f(x)$，即对任意 $x\in I$，都有

$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数．

例如，因在变速直线运动中，$s'(t)=v(t)$，所以位移函数 $s(t)$ 是速度函数 $v(t)$ 的原函数．再如，因 $(\sin x)'=\cos x$，所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数；因 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}\,(x>0)$，所以 $\ln x$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的一个原函数．

一个函数具备什么样的条件，才一定存在原函数呢？下面给出一个定理．

定理　如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么在区间 I 上一定存在可导函数 $F(x)$，使对任意 $x\in I$ 都有

$$F'(x)=f(x).$$

简言之，连续函数一定有原函数．由于初等函数在其定义区间上都是连续函数，所以初等函数在其定义区间上都有原函数．

定义 2　设 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上的原函数，则函数 $f(x)$ 的所有原函数 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记作

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

</td><td>讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法
学习原函数与不定积分的概念，不定积分的几何意义。
边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

其中，记号 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量.

例 1　求函数 $y=3x^2$ 的不定积分.

解　因为 $(x^3)'=3x^2$，即 x^3 是 $3x^2$ 的一个原函数，所以

$$\int 3x^2\mathrm{d}x = x^3 + C .$$

例 2　求函数 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 的不定积分.

解　因为 $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，即 $\sqrt{x}$ 是 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 的一个原函数，所以

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \sqrt{x} + C .$$

例 3　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的不定积分.

解　当 $x>0$ 时，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，所以

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C\ (x>0) .$$

当 $x<0$ 时，$[\ln(-x)]'=\dfrac{1}{-x}(-1)=\dfrac{1}{x}$，所以

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(-x) + C\ (x<0) .$$

综上所述，得到 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C\ (x\neq 0)$.

【教师】讲解不定积分的几何意义，并通过例题介绍其应用

当积分常数 C 取不同值时，函数 $f(x)$ 的所有原函数的图形为一族曲线，称为 $f(x)$ 的积分曲线族．这族曲线可以由其中的任意一条曲线沿 y 轴方向上下平移而得到，且对应同一横坐标的点 x 处的切线互相平行，如图 4-1 所示.

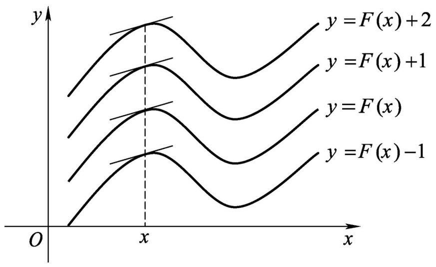


图 4-1

例 4　设曲线通过点 $(1,3)$ 且其上任意一点处的切线斜率为 $2x$，求此曲线的方程.

解　设所求的曲线方程为 $y=f(x)$，按题设，曲线上任意一点 (x,y) 处的切线斜率为

$$y'=f'(x)=2x\text{，}$$

即 $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数，因为 $\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$，所以曲线方程为

$$y=x^2+C\text{，}$$

将 $x=1$，$y=3$ 代入，得 $C=2$.

因此，所求曲线方程为

$$y=x^2+2\text{.}$$

例 5　在自由落体运动中，已知物体下落的时间为 t，求 t 时刻的下落速度和下落距离

解　设 t 时刻的下落速度为 $v=v(t)$，则加速度 $a(t)=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g$（其中 g 为重力加速度）.

因此

$$v(t)=\int a(t)\,\mathrm{d}t=\int g\mathrm{d}t=gt+C\text{，}$$

当 $t=0$ 时，$v(0)=0$，所以 $C=0$. 于是下落速度 $v(t)=gt$.

设下落距离为 $s=s(t)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v(t)$. 所以

$$s(t)=\int v(t)\,\mathrm{d}t=\int gt\mathrm{d}t=\frac{1}{2}gt^2+C\text{，}$$

<table>
<tr><th>课时分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及手段</th></tr>
<tr><td>知识讲解
40M</td><td>

【教师】讲解不定积分的基本性质

由不定积分的定义可直接推出下列性质：

性质 1 （1） $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$；

（2） $\int F'(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$.

【教师】讲解不定积分的基本积分公式，并通过例题介绍其应用

由此可见，微分运算与求不定积分的运算互为逆运算.

根据这一性质，我们把基本导数公式表加以逆推便可得到基本积分公式.

（1） $\int k\mathrm{d}x=kx+C$ (k 是常数)；

（2） $\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C\ (\mu\neq-1)$；

（3） $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$； （4） $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$；

（5） $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$； （6） $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$；

（7） $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$；

（8） $\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$；

（9） $\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$；

（10） $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C=-\arccos x+C$；

（10） $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C=-\arccos x+C$；

（11） $\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C=-\mathrm{arccot}\, x+C$

</td><td>讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法

学习不定积分的基本性质和基本积分公式。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

（12） $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$；

（13） $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$．

以上 13 个基本积分公式，是求不定积分的基础，必须牢记．下面举例说明积分公式（2）的应用．

例 6　求 $\int \frac{1}{x^5}\mathrm{d}x$．

解　$\int \frac{1}{x^5}\mathrm{d}x = \int x^{-5}\mathrm{d}x = \frac{1}{-5+1}x^{-5+1} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$．

例 7　求 $\int x^2\sqrt{x}\mathrm{d}x$．

解　$\int x^2\sqrt{x}\mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$．

例 8　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x}}$．

解　$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{4}{3}}\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C$．

下面给出积分公式（5）的应用．

例 9　求 $\int 2^x \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$．

解　$\int 2^x \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \int (2\mathrm{e})^x \mathrm{d}x = \frac{(2\mathrm{e})^x}{\ln(2\mathrm{e})} + C = \frac{2^x \mathrm{e}^x}{1+\ln 2} + C$．

由导数的线性运算性质

$$\left[\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x\right]' = \left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' + \left[\int g(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x) + g(x)$$

可得不定积分的线性运算法则：

性质 2　$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$　(k 是常数，$k \neq 0$)．

性质 3　$\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$．

<table>
<tr><td></td><td>

例 10　求 $\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)\mathrm{d}x$.

解　$\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)\mathrm{d}x=\int(x^2-\sqrt{x}+\sqrt{x^3}-1)\mathrm{d}x$

$$=\int x^2\mathrm{d}x-\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-x+C .$$

例 11　求 $\int(\mathrm{e}^x-3\cos x)\mathrm{d}x$.

解　$\int(\mathrm{e}^x-3\cos x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-3\int\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-3\sin x+C$.

例 12　求 $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$.

解　$\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$.

例 13　求 $\int\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解　$\int\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

$$=\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\arctan x+\ln|x|+C .$$

例 14　求 $\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解　$\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=\int\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x+\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C$.

例 15　求 $\int\tan^2 x\mathrm{d}x$.

解　$\int\tan^2 x\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\int\sec^2 x\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x=\tan x-x+C$.

【学生】理解不定积分的基本性质，掌握基本积分公式

</td><td></td></tr>
<tr><td>课堂
小结

5M</td><td>

【教师】简要总结本节课的要点

本节课学习了原函数与不定积分的概念，不定积分的几何意义，不定积分的基本性质，基本积分公式的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

【学生】总结回顾知识点

</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 12 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 18 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">授课题目（教学章、节或主题）：第四章　不定积分
第二节　换元积分法</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）能熟练地利用第一、二类换元积分法计算不定积分；
（2）记住常见的凑微分形式。
思政育人目标：
通过学习不定积分的换元积分法，培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学重点及难点：
教学重点：第一、二类换元积分法的相关定理
教学难点：用第一类换元法计算不定积分
应对策略：在讲不定积分的第一类换元法时，对于同一道例题可以引导学生采用直接积分法和凑微分法两种方法进行求解，培养学生逻辑推理能力，锻炼学生的开放创新思维，使学生明白，在今后的生活工作学习中，要从多角度思考问题，并灵活处理，才可以做到事半功倍。</td></tr>
<tr><td colspan="6">作业、讨论题、思考题：
习题 4- 2　T1　T3</td></tr>
<tr><td colspan="6">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了第一类换元法和第二类换元法的相关知识及其应用，了解了伯努利方程。课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点
■教学反思
本节课由于时间较为紧张，在课堂指导环节有些后进生的问题没有彻底解决，在课下还需对后进生进行针对辅导，以帮助后进生更好地理解所学知识，跟上其他学生的学习进度。</td></tr>
</table>

下节课预习重点：

分部积分法

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **45M**	**【教师】讲解第一类换元法，并通过例题介绍其应用** 定理 1（第一类换元法） 设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$， $u=\varphi(x)$ 可导，则有换元公式 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)=\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C=F[\varphi(x)]+C$. 第一类换元积分法又称为凑微分法，主要解决复合函数不定积分的计算问题. 例 1 求不定积分 $\int 3\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$. 解 $\int 3\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{3x}\cdot(3x)'\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}(3x)=\int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{u}+C$, 将变量 $u=3x$ 代入，即得 $\int 3\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{3x}+C$. 例 2 求不定积分 $\int (2x+1)^{10}\mathrm{d}x$. 解 令 $u=2x+1$，于是 $\int (2x+1)^{10}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int u^{10}\mathrm{d}u=\frac{1}{22}u^{11}+C=\frac{1}{22}(2x+1)^{11}+C$. 例 3 求 $\int \frac{1}{3+2x}\mathrm{d}x$. 分析 $\int \frac{1}{3+2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}(3+2x)'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}\mathrm{d}(3+2x)$. $\int \frac{1}{3+2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln\|u\|+C=\frac{1}{2}\ln\|3+2x\|+C$. 结论 例 2、例 3 可以总结出的凑微分形式为 $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$. 例 4 计算不定积分 $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$. 分析 可以考虑 $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$.	讲授法、 问答法、 讨论法、 演示法、 实践法

解 $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C$.

例 5 求 $\int x^2\sqrt{1+x^3}\mathrm{d}x$.

分析 类似于例 4，可以考虑 $x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}(1+x^3)$.

解 $\int x^2\sqrt{1+x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\sqrt{1+x^3}\mathrm{d}(1+x^3)=\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}+C$.

结论 例 4、例 5 可以总结出的凑微分形式为

$$\int f(ax^n+b)x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b).$$

通常情况下，除了上述两种凑微分形式，还有很多其他情形．下面给出一些常用的凑微分公式，利用它们可以灵活地进行积分计算．

（1）$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}\sqrt{x}$； （2）$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\frac{1}{x}$；

（3）$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln x$； （4）$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mathrm{e}^x$.

（5）$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x$； （6）$\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\cos x$.

（7）$\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\tan x$； （8）$\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\cot x$.

（9）$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arcsin x$； （10）$\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arctan x$.

例 6 求 $\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$.

解
$$\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{a}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\frac{x}{a}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$$

例 7 求 $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解 $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\frac{x}{a}=\arcsin\frac{x}{a}+C$.

<table>
<tr><th>课时
分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及
手段</th></tr>
<tr><td>知识
讲解

40M</td><td>

【教师】讲解第二类换元法，并通过例题介绍其应用

定理 2（第二类换元法） 设 $x=\varphi(t)$ 是单调、可导函数，并且 $\varphi'(t)\neq 0$，$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数 $F(t)$，则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C=F[\varphi^{-1}(x)]+C\ ,$$

其中 $t=\varphi^{-1}(x)$ 是 $x=\varphi(t)$ 的反函数用到第二类换元法的不定积分主要有两种类型：（1）简单无理函数的类型（例 18、例 19）；（2）三角函数代换法类型（例 20、例 21）.

例 8 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$.

解 令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$， $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}=2\int\frac{t\mathrm{d}t}{1+t}=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2(t-\ln|1+t|)+C=2(\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x}))+C\ .$$

例 9 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

解 被积函数中出现了两个不同的根式，为了同时消去这两个根式，可以作如下代换.

令 $t=\sqrt[6]{x}$，则 $x=t^6$， $\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$，从而

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}=\int\frac{6t^5}{(1+t^2)t^3}\mathrm{d}t=6\int\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

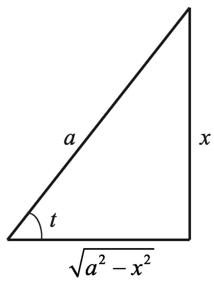
$$=6(t-\arctan t)+C=6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C\ .$$

结论 一般地，如果积分具有以下形式，则其可以进行如下相应代换：

（1） $\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})\mathrm{d}x$，可令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$；

（2） $\int R(x,\sqrt[n]{ax+b},\sqrt[m]{ax+b})\mathrm{d}x$，可令 $t=\sqrt[p]{ax+b}$，其中 p 是 m， n 的最小公倍数.

</td><td></td></tr>
</table>

	运用这些代换可以将被积函数中的根号去掉，将被积函数转化为有理函数． 例 10　求 $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$ ． 解　设 $x=a\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，那么 $$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t，\quad \mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t，$$ 于是 $$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\int a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t=a^2\int\cos^2 t\mathrm{d}t=a^2\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)+C .$$ 结合具体图像（见图 4-2）可以得出， $\sin t=\frac{x}{a}$，$\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$， 则 $t=\arcsin\frac{x}{a}$，$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$，所以 $$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C .$$  图 4-2	讲授法、 问答法、 讨论法、 演示法、 实践法
课堂 小结 5M	**【教师】简要总结本节课的要点** 　　本节课学习了第一类换元法和第二类换元法的相关知识及其应用，了解了伯努利方程。课后大家要多加练习，巩固认知。 **【学生】总结回顾知识点**	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 12 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 19 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">授课题目（教学章、节或主题）： 第四章　不定积分
第三节　分部积分法</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）能熟练地利用分部积分法计算不定积分；
（2）掌握化有理函数为部分分式的方法，并会计算较简单的有理分式函数的积分、三角有理式的积分和无理式的积分。
思政育人目标：
在学习分部积分法时，通过讲解分部积分公式，利用分部积分由难到易的转化引导学生在生活中处理任何问题，要遵循一定原则，不能一错再错，导致最终一发不可收拾，培养学生开阔视野，凡事要即使改变思路，化繁为简，大事化小，提升解决问题的能力。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学重点及难点：
教学重点：分部积分法的相关定理
教学难点：用分部积分法计算不定积分
应对策略：通过长时间教学探索与实践，发现不定积分的计算过程与习总书记倡导的“钉钉子精神”高度吻合。将“分部积分方法”与“钉钉子精神”相比较，加深同学们对积分方法的理解与应用。在讲述的过程中每一个环节与钉钉子相比较，让同学们更易掌握抽象的“分部积分方法”。</td></tr>
<tr><td colspan="6">作业、讨论题、思考题：
习题 4-3　T1</td></tr>
<tr><td colspan="6">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了分部积分法的积分的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点
■教学反思
本节课对学困生的“困难点”抓得不够准，也不够全面，导致部分学困生在课堂练</td></tr>
</table>

习中对一些学过的知识仍把握不好。在今后的教学中，应抓准每一个学生的“困难点”，制定出科学合理的辅导计划。用足够的爱心和耐心树立学生学习的自信和兴趣，从根本上解决问题。
下节课预习重点： 有理函数的积分
参考文献： 【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023. 【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005. 【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

<table>
<tr><th>课时分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及手段</th></tr>
<tr><td>知识讲解
45M</td><td>

【教师】讲解分部积分法，并通过例题介绍其应用

定理 1　设函数 $u=u(x)$， $v=v(x)$ 具有连续的导数，则

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u .$$

证明　由微分公式 $\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$ 两边积分得

$$uv=\int u\mathrm{d}v+\int v\mathrm{d}u ,$$

移项后得

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u .$$

我们把公式 $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$ 或 $\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x$ 称为分部积分公式.

例 1　求 $\int \ln x\mathrm{d}x$.

解　令 $u=\ln x$， $v=x$， 由分部积分公式，可得

$$\int \ln x\mathrm{d}x=x\ln x-\int x\mathrm{d}\ln x=x\ln x-\int \mathrm{d}x=x\ln x-x+C .$$

例 2　求 $\int \arctan x\mathrm{d}x$.

解　令 $u=\arctan x$， $v=x$， 由分部积分公式，可得

$$\begin{aligned}\int \arctan x\mathrm{d}x&=x\arctan x-\int x\mathrm{d}\arctan x\\&=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)\\&=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C .\end{aligned}$$

例 3　求 $\int x\cos x\mathrm{d}x$.

解　令 $u=x$， $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v$， 即 $v=\sin x$， 则

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\sin x=x\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$$

</td><td>讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法
学习分部积分法，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

例 4　求 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解　令 $u=x$， $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v$， $v=\mathrm{e}^x$，则

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C\ .$$

例 5　求 $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解　$\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

$=x^2\mathrm{e}^x-2(x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)+C$

$=\mathrm{e}^x(x^2-2x+2)+C$.

结论　当被积函数是幂函数与正（余）弦或指数函数的乘积时，可将幂函数设为 u，正（余）弦或指数函数设为 v.

<table>
<tr><th>课时分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及手段</th></tr>
<tr><td>知识讲解
40M</td><td>

例 6　求 $\int x\ln x\mathrm{d}x$.

解　$\int x\ln x\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}\ln x\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\left(x^2\ln x-\int x^2\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)$

$=\frac{1}{2}\left(x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2\right)+C$

$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$.

例 7　求 $\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

解　$\int x\arctan x\mathrm{d}x=\int\arctan x\mathrm{d}\frac{x^2}{2}$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\mathrm{d}\arctan x$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x+\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}x+C$.

结论　当被积函数是幂函数与对数函数或反三角函数的乘积时，可将对数函数或反三角函数设为 u，幂函数设为 v.

例 8　求 $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$.

解法一　$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\int\sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\sin x-\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$

$=\mathrm{e}^x\sin x-\int\cos x\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

$=\mathrm{e}^x\sin x-\mathrm{e}^x\cos x-\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$,

所以

$\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+C$.

解法二

$\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}(-\cos x)=\mathrm{e}^x(-\cos x)+\int\cos x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$

$=-\mathrm{e}^x\cos x+\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^x\cos x+\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}\sin x$

</td><td>学习分部积分法，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

课堂 小结 **5M**	$=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int\sin x\,de^x$ $=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx$， 所以 $$\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$$ 例 9　求 $\int e^{\sqrt{x}}dx$． 解　令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$， $dx=2tdt$． $$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int 2te^t dt=\int 2t de^t=2te^t-2\int e^t dt$$ $$=2te^t-2e^t+C=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C.$$ **【学生】掌握分部积分法的应用** **【教师】组织学生讨论以下问题** 1．可以用分部积分法的类型有哪些？ 2．对于各种不同类型的积分，如何选择 u，v？ 3．举例说明循环法适用的不定积分的类型． **【学生】讨论、发言** **【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况** **【学生】做测试题目** **【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程** **【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧**	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法

授课时间	第 12 周	课次	第 20 次课
授课方式（请打√）	理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□	课时安排	2

授课题目（教学章、节或主题）： 第四章　不定积分

第四节　有理函数的积分

教学目的与要求：

知识技能目标：

（1）掌握化有理函数为部分分式的方法，并会计算较简单的有理分式函数的积分、三角有理式的积分和无理式的积分。

思政育人目标：

讲解有理函数的积分、可化为有理函数的积分时，使学生们发现复杂的不定积分题目可以通过综合使用各类求解方法实现由难变易的转化，培养学生的综合分析能力.

教学重点及难点：

教学重点：有理函数积分的方法

教学难点：化有理函数为部分分式

应对策略：经过有理式的恒等变形，任何有理式总能化为某个既约分式．如果这个既约分式是只含有一个自变数的真分式，还可进一步化为若干个既约真分式之和，这几个分式便称为原来那个既约分式的部分分式。

作业、讨论题、思考题：

习题 4-4　T1　T5

课后小结：

■**【教师】简要总结本节课的要点**

本节课学习了有理函数的积分、三角函数有理式的积分的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

■**【学生】总结回顾知识点**

■**教学反思**

本节课对学困生的“困难点”抓得不够准，也不够全面，导致部分学困生在课堂练习中对一些学过的知识仍把握不好。在今后的教学中，应抓准每一个学生的“困难点”，制定出科学合理的辅导计划。用足够的爱心和耐心树立学生学习的自信和兴趣，从根本上解决问题。

下节课预习重点：

定积分的概念和性质

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

<table>
<tr><th>课时
分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及
手段</th></tr>
<tr>
<td>

知识讲解

30M

</td>
<td>

【教师】讲解有理函数的积分，并通过例题介绍其应用

形如

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

的函数称为**有理函数**，其中 m 和 n 都是非负整数；$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 $b_0,b_1,b_2,\cdots,b_m$ 都是实数，并且 $a_0\neq 0,b_0\neq 0$．当 $n<m$ 时，称这个有理函数为**真分式**；当 $n \geqslant m$ 时，称这个有理函数为**假分式**．

假分式总可以化成一个多项式与一个真分式之和的形式．例如，

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}.$$

求真分式的不定积分时，如果分母可因式分解，则先因式分解，然后化成部分分式再积分．

例 1 求 $\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$．

解 设 $\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$，则

$$A(x-3)+B(x-2)=(A+B)x-3A-2B=x+3，$$

即

$$\begin{cases}A+B=1,\\-3A-2B=3,\end{cases}$$

解得 $A=-5$，$B=6$，所以

$$\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}\right)\mathrm{d}x$$
$$=-5\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x+6\int\frac{1}{x-3}\mathrm{d}x=-5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C.$$

例 2 求 $\int\frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$．

解 设 $\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$，则

</td>
<td>

讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法

学习有理函数和三角函数有理式的积分。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

</td>
</tr>
</table>

	$$A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)=1,$$ $$(A+C)x^2+(B-2A-C)x+A=1,$$ 即 $$\begin{cases}A+C=0,\\B-2A-C=0,\\A=1,\end{cases}$$ 解得 $B=1$， $C=-1$．所以 $$\int\frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x$$ $$=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$$ $$=\ln\lvert x\rvert-\ln\lvert x-1\rvert-\frac{1}{x-1}+C.$$ 例 3　求 $\int\frac{x+1}{x^2-x-12}\mathrm{d}x$． 解　设 $\frac{x+1}{x^2-x-12}=\frac{x+1}{(x-4)(x+3)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+3}$，则 $$A(x+3)+B(x-4)=(A+B)x+3A-4B=x+1,$$ 即 $$\begin{cases}A+B=1,\\3A-4B=1,\end{cases}$$ 解得 $A=\frac{5}{7}$， $B=\frac{2}{7}$，所以 $$\int\frac{x+1}{x^2-x-12}\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\int\left(\frac{5}{x-4}+\frac{2}{x+3}\right)\mathrm{d}x\quad=\frac{5}{7}\ln\lvert x-4\rvert+\frac{2}{7}\ln\lvert x+3\rvert+C.$$ **【教师】讲解三角函数有理式的积分，并通过例题介绍其应用** **【学生】掌握有理函数和三角函数有理式的积分**	
课堂检测 **10M**	**【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况** **【学生】做测试题目** **【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程** **【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧**	
课堂小结 **5M**	**【教师】简要总结本节课的要点** 本节课学习了分部积分法、有理函数的积分、三角函数有理式的积分的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。 **【学生】总结回顾知识点**	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 13 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 21 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="2">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
</table>

授课题目（教学章、节或主题）： 第五章 定积分

第一节 定积分的概念与性质

教学目的与要求：

知识技能目标：

（1）理解定积分的概念；

（2）理解定积分的几何意义，并掌握其应用；

（3）掌握定积分的 6 个性质，并掌握其应用。

思政育人目标：

定积分的数学思想可以概括为“分割、近似、求和、取极限”。定积分的思想让同学们明白，再复杂的事情都是由简单的事情组合起来的，需要我们用智慧去分解，理性平和地去做事。

教学重点及难点：

教学重点：定积分的概念和性质

教学难点：定积分的几何意义

应对策略：从与学生专业相关的“铺设高铁路基的面积计算问题”引入，定积分的定义可以概括为“分割、近似、求和、取极限”。可以使学生明白遇到困难时不要害怕，再复杂的问题都是由简单的问题组合成的，可以把大问题分割成许多小问题逐个击破。

作业、讨论题、思考题：

习题 5-1 T2 T5

课后小结：

■ **【教师】简要总结本节课的要点**

本节课学习了定积分的概念、定积分的性质的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

■ **【学生】总结回顾知识点**

■ **教学反思**

本节课对学困生的“困难点”抓得不够准，也不够全面，导致部分学困生在课堂练习中对一些学过的知识仍把握不好。在今后的教学中，应抓准每一个学生的“困难

点”，制定出科学合理的辅导计划。用足够的爱心和耐心树立学生学习的自信和兴趣，从根本上解决问题。

下节课预习重点：

微分基本公式

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **45M**	（见下文）	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法 学习定积分的定义，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

【教师】通过例题讲解引出定积分的定义

1．曲边梯形的面积

由非负连续曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的图形称为曲边梯形，其中曲线弧 $y=f(x)$ 称为曲边，如图 6-1 所示．

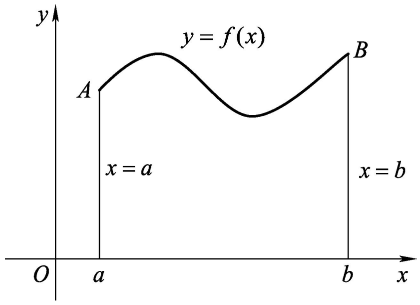


图 6-1

下面讨论如何求这种曲边梯形的面积 A．

如果曲边梯形的曲边是一条水平直线，这时，曲边梯形就变成了矩形，它的高是常量，因此，它的面积可按

$$\text{矩形面积}=\text{底}\times\text{高}$$

来计算．但曲边梯形在底边上各点处的高 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是变动的，故它的面积不能直接按上述公式来计算．

（1）细分：在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n],$$

它们的长度依次为

$$\Delta x_1=x_1-x_0,\Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}.$$

（2）近似求和：经过每一个分点做平行于 y 轴的直线段，把曲边梯形分成 n 个小曲边梯形．在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上任取一点 ξ_i，以 $[x_{i-1},x_i]$ 为底、$f(\xi_i)$ 为高的小矩形面积近似替代第 i 个小曲边梯形面积，把这样得到的 n 个小矩形面积之和作为所求曲边梯形面积 A 的近似值，即

$$A \approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ .$$

（3）取极限：记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，于是每个小曲边梯形的宽度趋于零，相当于令 $\lambda \to 0$．所以，曲边梯形的面积为

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ .$$

这样，既给出了曲边梯形面积的定义，又提供了一个计算曲边梯形面积值 A 的具体方法.

2．变速直线运动的路程

设某物体做直线运动，已知速度 $v = v(t)$ 是时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上 t 的非负连续函数，计算在这段时间内物体所经过的路程 S．

如果是匀速直线运动，其路程可按

$$路程 = 速度 \times 时间$$

（1）细分：在 $[T_1, T_2]$ 内任意插入若干个分点

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2 \ ,$$

把时间区间 $[T_1, T_2]$ 分成 n 个小段

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{n-1}, t_n] \ ,$$

各小段时间长依次为

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0, \Delta t_2 = t_2 - t_1, \cdots, \Delta t_n = t_n - t_{n-1} \ .$$

相应地，各段时间内物体经过的路程依次为 $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$．

（2）近似求和：在时间间隔 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一个时刻 τ_i $(t_{i-1} < \tau_i < t_i)$，以 τ_i 时刻的速度 $v(\tau_i)$ 来代替 $[t_{i-1}, t_i]$ 上各个时刻的速度，进而得到部分路程 ΔS_i 的近似值，即

$$\Delta S_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i \ (i = 1, 2, \cdots, n) \ .$$

于是这 n 段部分路程的近似值之和就是所求变速直线运动路程 S 的近似值，即

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i \ .$$

（3）取极限：记 $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$，当 $\lambda \to 0$ 时，取上述和式的极限，即得变速直线运动路程

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i \ .$$

【教师】讲解定积分的定义，并通过例题介绍其应用

定义　设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，在 $[a, b]$ 中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \ ,$$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

各小段区间的长依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一个点 ξ_i $(x_{i-1} < \xi_i < x_i)$，作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，并作出和

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果当 $\lambda \to 0$ 时，和 S 总趋于确定的极限 I，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，这时我们称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**定积分**，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

其中 $f(x)$ 称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，x 称为**积分变量**，a 称为**积分下限**，b 称为**积分上限**，$[a,b]$ 称为**积分区间**根据定积分的定义可知，曲边梯形的面积为

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$$

变速直线运动的路程为

$$S = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t.$$

那么，函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足什么条件时，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积呢？可以证明，**闭区间上的连续函数或仅有有限个第一类间断点的有界函数都是可积的**．在此，不做深入讨论．

定积分的几何意义：在区间 $[a,b]$ 上，当 $f(x) \geq 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y = f(x)$，两条直线 $x = a$，$x = b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积；当 $f(x) \leq 0$ 时，由曲线 $y = f(x)$，两条直线 $x = a$，$x = b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形位于 x 轴的下方，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = -\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [-f(\xi_i)]\Delta x_i = -\int_a^b [-f(x)]\mathrm{d}x,$$

在几何上表示上述曲边梯形面积的负值；当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有负时，如果约定在 x 轴上方的图形面积赋予正号，在 x 轴下方的图形面积赋予负号，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示介于直线 $x = a$ 与 $x = b$ 之间，在 x 轴上、下方各部分图形面积的代数和，

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 45M	（见下文）	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法

■ **【教师】讲解定积分的性质，并通过例题介绍其应用**

性质 1（线性性质）

$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. 式中的 α，β 是常数.

性质 2（积分区间的可加性）

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$. 式中的 c 可在 $[a, b]$ 内，也可在 $[a, b]$ 外. 例如，当 $a < b < c$ 时（见图 6-5），有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x .$$

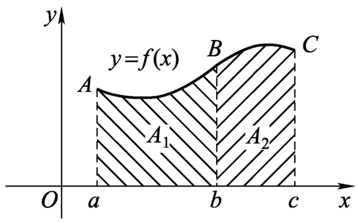


图 6-5

性质 3　如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 1$，则 $\int_a^b 1\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$.

这时，定积分在几何上表示底边为 $b-a$ 、高为 1 的矩形面积.

性质 4（比较性质）　如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x)\ \text{开}0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ \text{开}0 .$$

假设 $g(x) - f(x)\ \text{开}0$ 成立，从而有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x\ \text{开}0 ,$$

故

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\ \text{开}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

由此得到推论 1.

推论 1　如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \bullet g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \bullet \int_a^b g(x)\mathrm{d}x .$$

由于 $-|f(x)| \bullet f(x) \bullet |f(x)|$，所以

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \bullet \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \bullet \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x ,$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \bullet \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x .$$

由此得到推论 2.

推论 2　$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \bullet \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \ (a < b)$.

例 3　比较下列各对积分值的大小：

（1）$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$；（2）$\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$.

解　（1）在区间 $[0, 1]$ 上，显然 $\sqrt[3]{x}$ 开 x^3 . 由定积分的比较性质可知

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\mathrm{d}x \text{ 开} \int_0^1 x^3\mathrm{d}x .$$

（2）令 $f(x) = x - \ln(1+x)$，在区间 $[0, 1]$ 上有

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \text{ 开} 0 ,$$

可知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且单调增加，所以 $f(x)$ 开 $f(0) = 0$，即有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \text{ 开} 0 ,$$

所以，

$$\int_0^1 [x - \ln(1+x)]\mathrm{d}x \text{ 开} 0 ,$$

即

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x \text{ 开} \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x .$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内可积，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有上界 M 与下界 m，且 $m \bullet f(x) \bullet M$，$\forall x \in [a,b]$，由推论 1 有

$$\int_a^b m\mathrm{d}x \bullet \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \bullet \int_a^b M\mathrm{d}x ,$$

所以，

$$m(b-a) \bullet \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \bullet M(b-a) .$$

由此得到性质 5.

性质 5（估值定理）　设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a) \bullet \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \bullet M(b-a)\ (a<b) .$$

估值定理的几何意义：曲边梯形 $EabF$ 的面积介于矩形 $AabB$ 与矩形 $DabC$ 的面积之间，如图 6-6 所示.

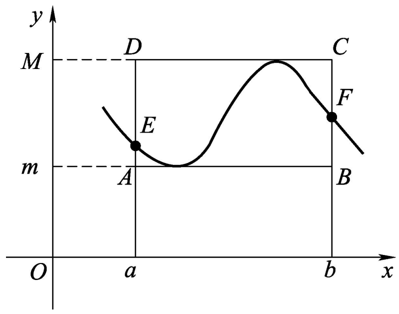


图 6-6

性质 6（积分中值定理）　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) .$$

积分中值公式的几何解释：设 $f(x)$ 幵0，则在区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得以 $f(\xi)$ 为高，区间 $[a,b]$ 的长度为底边的矩形面积等于相同底边且以 $f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积。

授课时间	第 13 周	课次	第 22 次课
授课方式（请打√）	理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□	课时安排	2

授课题目（教学章、节或主题）： 第五章　定积分

第二节　微分基本公式

教学目的与要求：

知识技能目标：

（1）理解积分上限函数的概念，并掌握其求导方法；

（2）掌握牛顿—莱布尼茨公式，及其应用；

（3）掌握定积分的计算。

思政育人目标：

通过学习积分上限函数及其导数和牛顿—莱布尼茨公式，培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯；树立学生实事求是、一丝不苟的科学精神。

教学重点及难点：

教学重点：积分上限函数的概念，牛顿—莱布尼茨公式

教学难点：定积分的计算

应对策略：首先通过回顾上节课的例子：用定积分的定义计算一个简单的定积分，让学生认识到利用定义计算定积分的过程相当复杂，而且计算量较大，开门见山提出问题：有没有计算定积分既简单又有效的方法呢？从而引出本节课学习的主要内容。

作业、讨论题、思考题：

习题 5-2　T2　T4

课后小结：

■ **【教师】简要总结本节课的要点**

本节课学习了积分上限函数及其导数、牛顿—莱布尼茨公式的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

■ **【学生】总结回顾知识点**

■ **教学反思**

这节课个人感觉严谨亲切有余，但活泼激情不足，整个教学过程显得有些平铺直叙，缺少高潮和亮点。在今后的教学中要更加严格地要求自己，在方方面面提高自己，

并通过增加互动环节提高学生的学习兴趣，为学生提供轻松、活跃的学习氛围。

下节课预习重点：

定积分的换元法和分部积分法

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **45M**	**【教师】通过引例，推导出牛顿—莱布尼兹公式** 设物体从某定点开始做直线运动，在 t 时刻所经过的路程为 $S(t)$，速度为 $v = v(t) = S'(t)$ ($v(t) \geqslant 0$)，则在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内物体所经过的路程 s 可表示为 $S(T_2) - S(T_1)$ 或 $\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$， 即 $\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t = S(T_2) - S(T_1)$. 由此看出，$\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$ 的值等于被积函数 $v(t)$ 的原函数 $S(t)$ 在 $t = T_2$ 处的值与在 $t = T_1$ 处的值之差. 对一般的情形，我们可以猜想有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ 成立，其中 $F(x)$ 是被积函数 $f(x)$ 的原函数．这就是牛顿—莱布尼兹公式. 在证明牛顿—莱布尼兹公式之前，先证明原函数存在定理. **【教师】讲解积分上限函数及其导数，并通过例题介绍其解法** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，并且设 x 为 $[a, b]$ 上的一点．若积分上限 x 在 $[a, b]$ 上每取一个值，函数 $f(x)$ 在部分区间 $[a, x]$ 上的定积分 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 总有一个值与 x 相对应，即在 $[a, b]$ 上定义了一个函数，称为积分上限函数，也称为变上限定积分，记作 $\Phi(x)$，即 $\Phi(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 或 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. 相应地，可以定义积分下限函数（或变下限定积分）. 定理 1　如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a, b]$ 上可导，且其导数为	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法 学习积分上限函数及其导数。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

$$\Phi'(x)=\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(x)\ \ (a\bullet x\bullet b)\ .$$

证明　对 $x\in(a,b)$，取 Δx 使 $x+\Delta x\in(a,b)$，

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t+\int_x^a f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t$$ （积分区间的可加性）

$=f(\xi)\Delta x$（积分中值定理），

其中 ξ 在 x 与 $x+\Delta x$ 之间，如图 6-8 所示．当 $\Delta x\to 0$ 时，$\xi\to x$．于是

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x)\ .$$

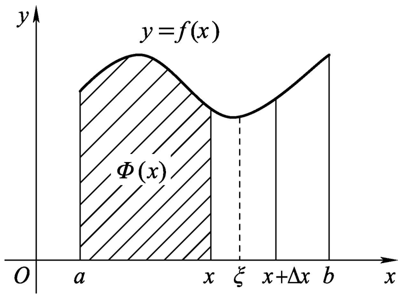


图 6-8

若 $x=a$，取 $\Delta x>0$，则同理可证

$$\Phi'_+(a)=f(a)\ ;$$

若 $x=b$，取 $\Delta x<0$，则同理可证

$$\Phi'_-(b)=f(b)\ .$$

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **45M**	**【教师】讲解牛顿—莱布尼茨公式，并通过例题介绍其应用** 定理 3（微积分基本公式）　如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\ .$$ 此公式称为牛顿—莱布尼茨公式，也称为微积分基本公式. 证明　已知函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数．根据定理 2 可知，积分上限函数 $\varPhi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数．于是存在一常数 C，使 $$F(x) - \varPhi(x) = C\ (a \leqslant x \leqslant b)\ .$$ 当 $x = a$ 时，有 $F(a) - \varPhi(a) = C$，因为 $\varPhi(a) = 0$，所以 $C = F(a)$；当 $x = b$ 时，$F(b) - \varPhi(b) = C = F(a)$，所以 $\varPhi(b) = F(b) - F(a)$，即 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\ .$$ 该公式进一步揭示了定积分与被积函数的原函数的联系，并且表明：当被积函数的原函数可以求出时，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分值等于它的任意一个原函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的增量．为了方便把 $F(b) - F(a)$ 表示为 $$[F(x)]_a^b\ .$$ 例 5　计算 $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$. 解　由于 e^x 在 $[0,1]$ 上连续且是 e^x 的一个原函数，所以 $$\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e} - 1\ .$$ 例 6　计算 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. 解　由于 $\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数，所以 $$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_{-1}^{\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan(-1) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{12}\pi$$	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法 学习牛顿—莱布尼茨公式，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

例 7　设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & 0 \leqslant x<1, \\ 2x-1, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x)dx$.

解　利用定积分对区间的可加性，有

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1 e^x dx+\int_1^2 (2x-1)dx=[e^x]_0^1+[x^2-x]_1^2=e+$$

.

例 8　计算 $\int_0^4 |x-3|\,dx$.

解　$$\int_0^4 |x-3|\,dx=\int_0^3 |x-3|\,dx+\int_3^4 |x-3|\,dx=-\int_0^3 (x-3)dx+\int_3^4 (x-3)dx$$

$$=-\frac{1}{2}[(x-3)^2]_0^3+\frac{1}{2}[(x-3)^2]_3^4=5 .$$

例 9　计算正弦曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形的面积.

解　这图形是曲边梯形的一个特例，它的面积

$$A=\int_0^\pi \sin x dx=[-\cos x]_0^\pi=-(-1)-(-1)=2 .$$

例 10　汽车以 36 km/h 速度行驶，到某处需要减速停车．设汽车以等加速度 $a=-5\ \mathrm{m/s^2}$ 刹车．问从开始刹车到停车，汽车走了多少距离？

解　先要算出从开始刹车到停车所需的时间．当 $t=0$ 时，汽车速度

$$v_0=36\ \mathrm{km/h}=\frac{36\times 1\,000}{3\,600}\ \mathrm{m/s}=10\ \mathrm{m/s} .$$

刹车后 t 时刻汽车的速度为

$$v(t)=v_0+at=10-5t .$$

当汽车停止时，速度 $v(t)=0$ ，代入上式得， $t=2\ \mathrm{s}$ ．于是从开始刹车到停车汽车所走过的距离

$$s=\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2 (10-5t)dt=\left[10t-\frac{5}{2}t^2\right]_0^2=10\ (\mathrm{m}) ,$$

即在刹车后，汽车需走过 10 m 才能停住.

【学生】掌握牛顿—莱布尼茨公式及其应用

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 14 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 23 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="2">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="5">授课题目（教学章、节或主题）： 第五章　定积分
第三节　定积分的换元法和分部积分法</td></tr>
<tr><td colspan="5">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）掌握定积分的换元积分法；
（2）掌握定积分的分部积分法。
思政育人目标：
通过讲解分部积分公式，利用分部积分由难到易的转化引导学生在生活中处理任何问题，要遵循一定原则，不能一错再错，导致最终一发不可收拾，培养学生开阔视野，凡事要即使改变思路，化繁为简，大事化小，提升解决问题的能力。</td></tr>
<tr><td colspan="5">教学重点及难点：
教学重点：换元积分法和分部积分法的相关定理
教学难点：利用换元积分法和分部积分法计算定积分
应对策略：换元法和分部积分法这两种求解不定积分的方法，这两种方法应用在定积分上有一点需要注意，虽然不定积分和定积分只有一字之差，但是在数学上其实它们是两个完全不同的概念。不定积分求解的是函数的原函数，而定积分则是求解的曲形的面积，也就是一个具体的值。</td></tr>
<tr><td colspan="5">作业、讨论题、思考题：
习题 5-3　T1　T4</td></tr>
<tr><td colspan="5">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了定积分的换元积分法和分部积分法的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点
■教学反思
本节课发现一些学生的练习不够，强化不够，检查不够，解题时出现了一些不应出现的错误，后面的教学中应要求学生更多地进行练习，让学生在练习中体会、理解所学知识的应用，并学会在练习中总结，反思。</td></tr>
</table>

下节课预习重点：

反常积分

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **40M**	**【教师】讲解定积分的换元积分法，并通过例题介绍其应用** 定理　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足： （1） $\varphi(\alpha)=a$， $\varphi(\beta)=b$； （2） $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上单调且有连续的导数，则 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t .$$ 这个公式称为定积分的换元公式. 证明　因为 $f(x)$，$x=\varphi(t)$ 及 $\varphi'(t)$ 均为连续函数，所以 $f(x)$ 及 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 都有原函数，设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a) .$$ 另一方面，因为 $\{F[\varphi(t)]\}'=F'[\varphi(t)]\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$，所以 $F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数，从而 $$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a) ,$$ 因此 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t .$$ 例 1　求 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$. 解　令 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$．当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=a$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$（可以看出，$x=a\sin t$，$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 是单调增加的）．于是 $$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$ $$=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}a^2 .$$ 例 2　计算 $\int_{\ln 3}^{\ln 8}\sqrt{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法

解 令 $\sqrt{1+e^x}=t$，则 $x=\ln(t^2-1)$，$dx=\dfrac{2t}{t^2-1}dt$．当 $x=\ln 3$ 时，$t=2$；当 $x=\ln 8$ 时，$t=3$．于是

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8}\sqrt{1+e^x}dx=\int_2^3\frac{2t^2}{t^2-1}dt=2\int_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

$$=2\left[t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_2^3=2+\ln\frac{3}{2}.$$

例 3 计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin x dx}{1+\cos^2 x}$．

解 令 $t=1+\cos^2 x$，则 $-\dfrac{1}{2}dt=\cos x\sin x dx$．当 $x=0$ 时，$t=2$；当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$t=1$．

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin x dx}{1+\cos^2 x}=-\frac{1}{2}\int_2^1\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}[\ln t]_1^2=\frac{1}{2}\ln 2.$$

例 4 计算 $\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx$．

解 $$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx=\int_0^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x|\cos x|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}xd\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}xd\sin x=\left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}$$

课堂小结 5M

【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况

【学生】做测试题目

【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程

【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 30M	**【教师】讲解定积分的分部积分法，并通过例题介绍其应用** 设函数$u(x)$，$v(x)$在区间$[a,b]$上具有连续导数$u'(x)$，$v'(x)$，由不定积分的分部积分法，可得 $$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=\left[\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x\right]_a^b=\left[u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)\right]_a^b$$ $$=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x)\text{，}$$ 简记为 $$\int_a^b uv'\mathrm{d}x=[uv]_a^b-\int_a^b u'v\mathrm{d}x \text{ 或 } \int_a^b u\mathrm{d}v=[uv]_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u\text{．}$$ 这就是定积分的分部积分公式． 例 5　求$\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x$． 解　$\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\left[[x^2\ln x]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}x^2\mathrm{d}\ln x\right]$ $$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}}x^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}}x\mathrm{d}x$$ $$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)\text{．}$$ 例 6　计算$\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\mathrm{d}x$． 解　$\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\mathrm{d}x=[x\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ $$=\frac{\pi}{12}+\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\text{．}$$ 例 7　设函数$y=f(x)$在$[0,1]$上具有三阶连续导数，且有$f'(0)=1$，$f'(1)=2$，$f(0)=f(1)=0$，求$\int_0^1 f(x)f'''(x)\mathrm{d}x$． 解　$\int_0^1 f(x)f'''(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}f''(x)=[f(x)f''(x)]_0^1-\int_0^1 f''(x)f'(x)\mathrm{d}x$	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法

$$=-\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}f'(x)=-\left[\frac{[f'(x)]^2}{2}\right]_0^1=-\frac{3}{2}.$$

例 8　证明一个重要的递推公式：

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\left(=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x\right)=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数},\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{为大于1的正奇数}.\end{cases}$$

证明　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\mathrm{d}\cos x$

$$=-[\sin^{n-1}x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}(\sin^{n-1}x)$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2}x\mathrm{d}x$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$$

$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

所以

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

这个等式称为 I_n 关于下标的递推公式.

例 9　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 x\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 x\mathrm{d}x=\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{128}{315}$.

授课时间	第 14 周	课次	第 24 次课
授课方式 （请打√）	理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□	课时 安排	2

授课题目（教学章、节或主题）： 第五章 定积分

第四节 反常积分

教学目的与要求：

知识技能目标：

（1）理解无穷限的反常积分，并掌握其应用；

（2）理解无界函数的反常积分，并掌握其应用。

思政育人目标：

通过学习穷限的反常积分和无界函数的反常积分，培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯；树立学生实事求是、一丝不苟的科学精神。

教学重点及难点：

教学重点：无穷限的反常积分的定义、无界函数的反常积分的定义

教学难点：无穷限的反常积分的应用

应对策略：教师首先通过学生感兴趣的火箭发射问题引出第二宇宙速度，创设适合学生探究的问题情境，学生通过小组讨论生成无穷限反常积分的概念，借助教学平台的随堂测验、头脑风暴等功能巩固深化概念。

作业、讨论题、思考题：

习题 5-4 T2 T5

课后小结：

■ **【教师】简要总结本节课的要点**

本节课学习了无穷限的反常积分和无界函数的反常积分的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

■ **【学生】总结回顾知识点**

■ **教学反思**

本节课由于对所讲知识中重点和难点的把握较好，因此取得了不错的效果。我在教学过程中体会到，对教学重点、难点的把握正确与否，决定着教学过程的意义。若不正确，教学过程就失去了意义，若不明确，教学过程就失去了方向。因此重点和难点是教学活动的依据，也是教学活动中的重点和方向，一定要把握好。

下节课预习重点：

定积分的元素法

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

<table>
<tr><th>课时分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及手段</th></tr>
<tr><td>知识讲解
45M</td><td>

【教师】讲解反常积分的概念

前面讨论的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，其积分区间 $[a,b]$ 为有限区间，且在定积分存在的条件下被积函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界的. 可是在很多实际问题中会遇到积分区间为无穷区间或者被积函数在积分区间上是无界的定积分，这样的积分称为反常积分或广义积分. 本节将通过定积分对这两种情形的反常积分进行讨论.

【教师】讲解无穷限的反常积分，并通过例题介绍其应用

定义 1　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $t>a$，如果极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x .$$

这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 如果上述极限不存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散. 这时反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 仅仅是个记号，不表示任何数值.

由定义可知，我们讨论反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性，实际上就是考察变上限积分

$$\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\ (t>a),$$

当 $t\to+\infty$ 时的极限是否存在.

若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上为非负的，且反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的值从几何上可以解释为由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$ 及 x 轴所围成的向右无限延伸区域的面积，如图 6-9 所示.

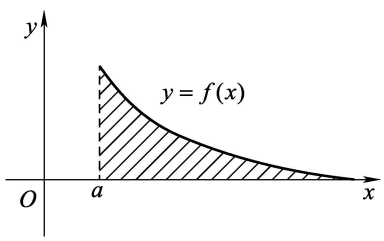


图 6-9

</td><td>讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法
学习无穷限的反常积分，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

类似地，可定义 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上的反常积分为

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{b} f(x)\mathrm{d}x .$$

而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的反常积分为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t \to +\infty} \int_{c}^{t} f(x)\mathrm{d}x .$$

其中，c 为任意实数．当反常积分 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛时，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；当 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 中一个发散或两个均发散时，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散．

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的一个原函数，则

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t \to +\infty} \int_{a}^{t} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t \to +\infty} [F(x)]_{a}^{t} = \lim_{t \to +\infty} [F(t) - F(a)] = \lim_{t \to +\infty} F(t) - F(a)$$

记 $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = F(+\infty)$，于是有

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(a) = [F(x)]_{a}^{+\infty} .$$

类似地，若记 $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty)$，则

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(-\infty) = [F(x)]_{-\infty}^{b} ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(-\infty) = [F(x)]_{-\infty}^{+\infty} .$$

例 1　讨论反常积分 $\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x \ (a > 0)$ 的敛散性．

解　当 $p = 1$ 时，

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln x]_{a}^{+\infty} = +\infty .$$

当 $p < 1$ 时，

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right]_{a}^{+\infty} = +\infty ;$$

当 $p > 1$ 时，

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right]_{a}^{+\infty} = \frac{a^{1-p}}{p-1} .$$

因此，当 $p > 1$ 时，此反常积分收敛，其值为 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$；当 $p \leqslant 1$ 时，此反常积分发散．

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 45M	**【教师】讲解无界函数的反常积分，并通过例题介绍其应用** 定义 2　设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，而在点 a 的右邻域内无界．取 $t>a$，如果极限 $\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的反常积分，仍然记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x .$$ 这时也称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛．如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散． 类似地，设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续，而在点 b 的左邻域内无界．取 $t<b$，如果极限 $\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的反常积分，仍然记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x .$$ 这时也称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛．如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散． 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上除点 $c\ (a<c<b)$ 外连续，而在点 c 的任意邻域内无界．如果两个反常积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且定义 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x .$$ 如果两个反常积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 有一个发散，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散． 如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界，那么点 a 称为函数 $f(x)$ 的瑕点．故无界函数的反常积分又称为瑕积分． 如果 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，当 a 为瑕点时，则有	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法 学习无界函数的反常积分，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}[F(x)]_t^b=F(b)-\lim_{t\to a^+}F(t)=F(b)-\lim_{x\to a^+}F(x),$$

可采用如下简记形式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(b)-\lim_{x\to a^+}F(x).$$

类似地，当 b 为瑕点时，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=\lim_{x\to b^-}F(x)-F(a).$$

当 $c\ (a<c<b)$ 为瑕点时，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=[\lim_{x\to c^-}F(x)-F(a)]+[F(b)-\lim_{x\to c^+}F(x)]$$

例 4　计算反常积分 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=\infty$，所以 $x=a$ 为函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 的瑕点.

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a^-}=\lim_{x\to a^-}\arcsin\frac{x}{a}-\arcsin 0=\arcsin 1-0=\frac{\pi}{2}$$

这个反常积分值的几何意义：位于曲线 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 之下、x 轴之上，直线 $x=0$ 与 $x=a$ 之间的图形面积，如图 6-11 所示.

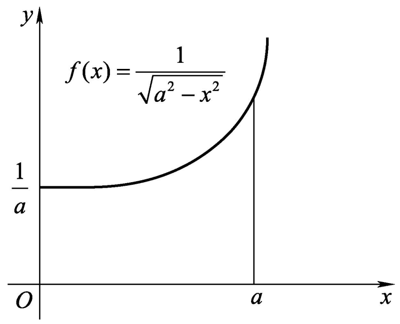


图 6-11

【学生】理解无界函数的反常积分的定义，并掌握其应用

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 14 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 25 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
</table>

授课题目（教学章、节或主题）： 第六章　定积分的应用

第一节　定积分的元素法

第二节　定积分在几何学上的应用

教学目的与要求：

知识技能目标：

（1）理解定积分的微元法；

（2）了解定积分在几何上的应用。

思政育人目标：

借助直观的几何图形讲解微元法，并介绍定积分在几何领域的应用，在寻找微元，化整为零的过程中透过现象看本质，学习数学中解决问题的方法和核心思想：化整为零，化繁为简，所有问题都可以通过这种由简单到复杂的方式解决，世上无难事，只怕有心人。

教学重点及难点：

教学重点：定积分的微元法

教学难点：定积分在几何上的应用

应对策略：定积分概念是高等数学教学内容最抽象也最难懂的一个概念之一，特别是和式的极限非常抽象，学生学习容易吃力，因此，在教学中融入数学家的历史故事、数学文化、哲学思想、文学艺术知识、中国和世界传统文化、社会热点问题等内容，既能对学生进行思想政治教育，又可以激发学生的学习兴趣，从而提高高等数学的教学质量。

作业、讨论题、思考题：

习题 6-2　T1　T3

课后小结：

■**【教师】简要总结本节课的要点**

本节课学习了定积分的微元法和利用定积分求平面图形的面积、旋转体体积、平行截面面积已知的立体体积、平面曲线的弧长。课后大家要多加练习，巩固认知。

■**【学生】总结回顾知识点**

■**教学反思**

本节课发现部分学生缺乏练习，无法将所学知识很好地应用到题目中。在今后的教学中应更加注重课堂练习环节的作用，将其与平时成绩紧密结合，让学生自主参与，消除学生的惰性，培养学生良好的学习习惯。

下节课预习重点：

定积分在物理学上的应用

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

<table>
<tr><th>课时分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及手段</th></tr>
<tr><td>知识讲解
45M</td><td>

【教师】讲解定积分的微元法

引入定积分概念时，从讨论曲边梯形的面积问题中知道，积分 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是以 $[a,b]$ 为底、以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积．而微分 $\mathrm{d}A(x)=f(x)\mathrm{d}x$ 表示点 x 处以 $\mathrm{d}x$ 为宽的小曲边梯形面积的近似值 $\Delta A\approx f(x)\mathrm{d}x$，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为曲边梯形的面积元素．那么，以 $[a,b]$ 为底的曲边梯形的面积 A 就是以面积元素 $f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，以 $[a,b]$ 为积分区间的定积分．一般情况下，为求某一量 U（与变量 x 有关的量），先确定变量 x 的变化区间 $[a,b]$，再求量 U 的元素 $\mathrm{d}U$．若 $\mathrm{d}U=f(x)\Delta x=f(x)\mathrm{d}x$，则量 U 就是以 $f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，以 $[a,b]$ 为积分区间的定积分，即

$$U=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ .$$

这一方法通常称为微元法（或称为元素法）．

【教师】讲解利用定积分求平面图形的面积，并通过例题介绍其应用

1．直角坐标情形

设平面图形由上下两条曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 及左右两条直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成（见图 7-1），则面积元素为

$$\mathrm{d}S=[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\ ,$$

于是平面图形的面积为于是平面图形的面积为

$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\ .$$

类似地，由左右两条曲线 $x=\varphi(y)$ 与 $x=\psi(y)$ 及上下两条直线 $y=d$ 与 $y=c$ 所围成的平面图形（见图 7-2）的面积为

$$S=\int_c^d[\psi(y)-\varphi(y)]\mathrm{d}y\ .$$

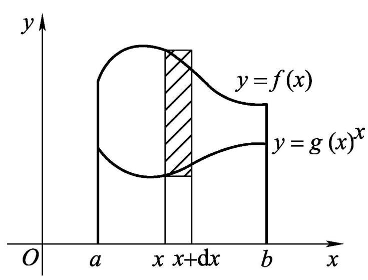


图 7-1

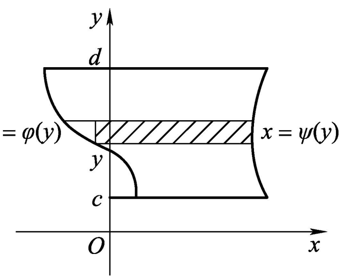


图 7-2

</td><td>讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法
学习定积分的微元法，掌握利用定积分求平面图形面积和立体体积的方法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

例 1　计算由抛物线 $y=-x^2+1$ 和 $y=x^2-x$ 所围成的图形的面积．

解　（1）画图，如图 7-3 所示；

（2）确定图形在 x 轴上的投影区间：$\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$；

（3）确定上下曲线，$f_{上}(x)=-x^2+1$；$f_{下}(x)=x^2-x$；

（4）计算积分：

$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(-x^2+1-x^2+x)\mathrm{d}x=\left[-\frac{2x^3}{3}+x+\frac{x^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}=\frac{9}{8}.$$

例 2　计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积．

解　（1）画图，如图 7-4 所示；

（2）确定图形在 y 轴上的投影区间：$[-2,4]$；

（3）确定左右曲线，$\varphi_{左}(x)=\dfrac{1}{2}y^2$，$\varphi_{右}(x)=y+4$；

（4）计算积分：

$$S=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y=\left[\frac{1}{2}y^2+4y-\frac{1}{6}y^3\right]_{-2}^{4}=18.$$

2．参数方程情形

有时候，用曲线的参数方程计算一些平面图形面积更简便．

例 3　如图 7-5 所示，求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形的面积．

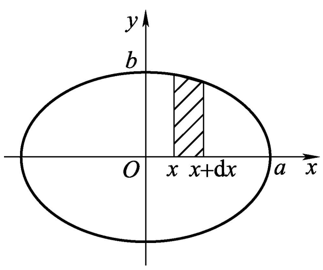


图 7-5

解　因为整个椭圆的面积是椭圆在第一象限部分的四倍，椭圆在第一象限部分在 x 轴上的投影区间为 $[0,a]$．因为面积元素为 $y\mathrm{d}x$，所以

$$S = 4\int_0^a y\mathrm{d}x\ .$$

椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos t\,, \\ y = b\sin t \end{cases} (0 \bullet t \bullet 2\pi)\,,$$

于是，

$$S = 4\int_0^a y\mathrm{d}x = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t\mathrm{d}(a\cos t) = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\mathrm{d}t = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\mathrm{d}t = 2ab\cdot\frac{\pi}{2} = \pi ab$$

3．极坐标情形

由曲线 $\rho = \varphi(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha$， $\theta = \beta$ 围成的图形称为曲边扇形，如图 7-6 所示．

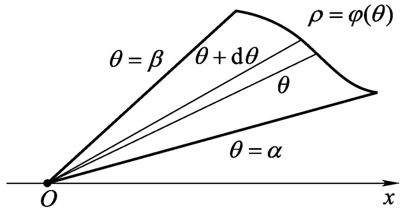


图 7-6

取 θ 为积分变量，在区间 $[\alpha\,,\beta]$ 上任取子区间 $[\theta\,,\theta+\mathrm{d}\theta]$，相应的小曲边扇形的面积可用半径为 $\rho = \varphi(\theta)$ 、中心角为 $\mathrm{d}\theta$ 的圆扇形的面积来近似代替

即面积元素为

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta\ .$$

因此，曲边扇形的面积为

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [\varphi(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta\ .$$

例 4　如图 7-7 所示，求对数螺线 $\rho = a\mathrm{e}^\theta$ $(-\pi \bullet \theta \bullet \pi)$ 及射线 $\theta = -\pi$ 和 $\theta = \pi$ 所围成的图形面积．

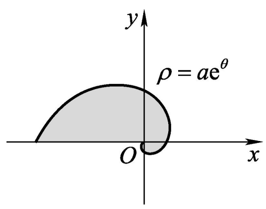


图 7-7

解　所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(a\mathrm{e}^{\theta})^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}a^2\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{4}(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}).$$

例 5　如图 7-8 所示，求由曲线 $\rho=3\cos\theta$ 及 $\rho=1+\cos\theta$ 所围成图形公共部分的面积.

解　曲线 $\rho=3\cos\theta$ 与 $\rho=1+\cos\theta$ 交点的极坐标为

$$A\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3}\right),\quad B\left(\frac{3}{2},-\frac{\pi}{3}\right).$$

由于对称性，所求面积为

$$S=2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta\right]$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta+9\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta\right)\mathrm{d}\theta+\frac{9}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{5}{4}\pi-\frac{9}{8}\sqrt{3}.$$

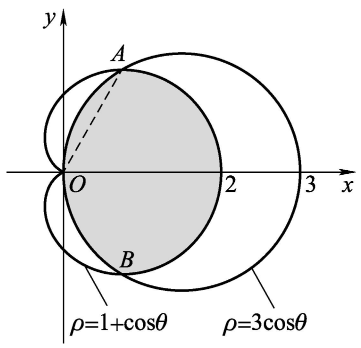


图 7-8

【教师】讲解利用定积分求旋转体的体积和平行截面面积为已知的立体的体积，并通过例题介绍其应用

课时分配	教 学 内 容	方法及手段

【教师】讲解利用定积分求平面曲线的弧长，并通过例题介绍其应用

设 A，B 是曲线弧上的两个端点，在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上依次任取分点

$A = M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{i-1}$，

$M_i, \cdots, M_{n-1}, M_n = B$，并依次连接相邻的分点得折线 $M_{i-1}M_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$，如图 7-16 所示．当分点的数目无限增加且每个小段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 都缩向一点时，如果此折线的长 $\sum\limits_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|$ 的极限存在，则称此极限为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长，并称此曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 是**可求长**的．

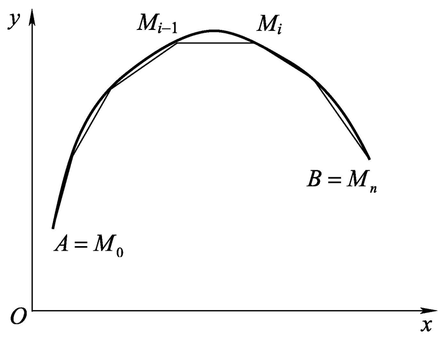


图 7-16

定理　光滑曲线弧是可求长的．

证明略．

1．直角坐标情形

设曲线弧的直角坐标方程为

$$y = f(x)\ (a \leqslant x \leqslant b),$$

$f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有一阶连续导数．

现在来计算该曲线弧的长度．如图 7-17 所示，取横坐标 x 为积分变量，它的变化区间为 $[a, b]$．曲线 $y = f(x)$ 上相应于 $[a, b]$ 上任一小区间 $[x, x + \mathrm{d}x]$ 的一段弧的长度为 Δs，可以用该曲线在点 $(x, f(x))$ 处的切线上相应的一小段长度来近似代替，切线上相应的小段长度为

$$\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x,$$

从而得**弧长元素**（即弧微分）为

知识讲解

30M

讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法

学习利用定积分求平面曲线弧长的方法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x\ .$$

以 $\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在闭区间 $[a,b]$ 上积分，可得所求的弧长为

$$S=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x\ .$$

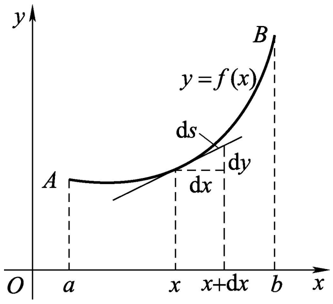


图 7-17

例 10　如图 7-18 所示，求抛物线 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2+y^2=3$ 所截下的有限部分的弧长.

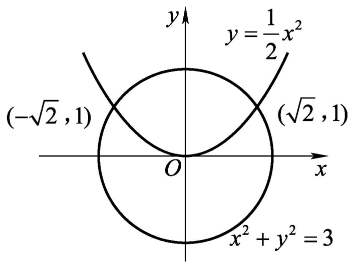


图 7-18

解　由 $\begin{cases}x^2+y^2=3,\\ y=\dfrac{1}{2}x^2\end{cases}$ 解得抛物线与圆的两个交点分别为 $(-\sqrt{2},1)$ 和 $(\sqrt{2},1)$，

于是所求的弧长为

$$S=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=2\left[\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})\ .$$

2．参数方程情形

设曲线弧由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(\alpha \bullet t \bullet \beta)$ 给出，其中 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数，且 $\varphi'(t)$，$\psi'(t)$ 不同时为零．因为

$$\mathrm{d}y=\psi'(t)\mathrm{d}t，\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

所以弧长元素为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)(\mathrm{d}t)^2+\psi'^2(t)(\mathrm{d}t)^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

所求弧长为

$$S=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t\ .$$

例 11　计算摆线$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \bullet t \bullet 2\pi)$ 的一拱的长度．

解　由弧长元素的参数方程公式，有

$$\mathrm{d}s=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=a\sqrt{2(1-\cos t)}\mathrm{d}t=2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t,$$

所求弧长为

$$S=\int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8a\ .$$

3．极坐标情形

设曲线弧由极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ $(\alpha \bullet \theta \bullet \beta)$ 给出，其中 $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数，由直角坐标与极坐标的关系可得

$$x=\rho(\theta)\cos\theta，y=\rho(\theta)\sin\theta\left(\alpha \bullet \theta \bullet \beta\right),$$

于是得弧长元素为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\sqrt{\rho^2\left(\theta\right)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta\ ,$$

从而所求弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta\ .$$

例 12　计算 $\rho\theta=1$ 相应于 $\frac{3}{4}\bullet\theta\bullet\frac{4}{3}$ 的一段弧长.

解　由弧长的极坐标公式得

$$S=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{\left(\frac{1}{\theta}\right)^2+\left(-\frac{1}{\theta^2}\right)^2}\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{\theta^2}\sqrt{1+\theta^2}\mathrm{d}\theta=\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}.$$

【学生】掌握利用定积分求平面曲线弧长的方法

问题讨论

10M

【教师】组织学生讨论以下问题

1．光滑曲线有什么特征？

2．定积分在几何上有哪些应用？

【学生】讨论、发言

【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况

【学生】做测试题目

【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程

【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧

课堂小结

5 M

【教师】简要总结本节课的要点

本节课学习了定积分的微元法和利用定积分求平面图形的面积、旋转体体积、平行截面面积已知的立体体积、平面曲线的弧长。课后大家要多加练习，巩固认知。

【学生】总结回顾知识点

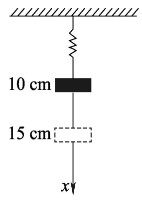
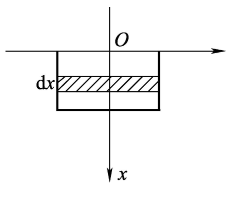
<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 15 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 26 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">授课题目（教学章、节或主题）： 第六章　定积分的应用
第三节　定积分在物理学上的应用</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）了解定积分在物理学上的应用。
思政育人目标：
通过介绍定积分在物理领域的应用，使学生体会到数学在实际问题中的应用，增加学生的学习兴趣；培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；引导学生运用所学知识揭示生活中的奥秘，在实践中深化认识，达到学以致用的目的。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学重点及难点：
教学重点：定积分在物理学上的应用
教学难点：定积分在实际问题中的应用
应对策略：通过对一些物理情境以及物理问题的研究引出定积分在物理学上的应用，利用多媒体技术加深理解。</td></tr>
<tr><td colspan="6">作业、讨论题、思考题：
习题 6-3　T1　T2</td></tr>
<tr><td colspan="6">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了定积分在物理和经济分析上的应用。物理上的应用包括求变力沿直线所做的功、水压力和引力，课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点
■教学反思
本节课整体效果不错，由于所讲知识在物理等方面与实际接轨，因此学生的学习兴致很高，在今后的的教学中，应将所讲知识多与实际问题相结合，这样可以起到事半功倍的效果。。</td></tr>
<tr><td colspan="6">下节课预习重点：
微分方程的基本概念</td></tr>
</table>

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **45M**	**【教师】讲解定积分在“变力沿直线所做的功”问题中的应用** 从物理学知道，当物体在恒力 F 的作用下，沿力的方向做直线运动，将物体移动了距离 s 时，力 F 所做的功为 $$W = Fs\ .$$ 但在实际问题中，常常需要计算变力所做的功，下面我们通过举例来说明如何计算变力沿直线所做的功. 例 1　设 40 N 的力使弹簧从自然长度 10 cm 拉长到 15 cm，问需要做多大的功才能克服弹性恢复力，将伸长的弹簧从 15 cm 处再拉长 3 cm？ 解　如图 7-19 所示，根据胡克定律，有 $F(x) = kx$. 当弹簧从 10 cm 拉长到 15 cm 时，它伸长量为 $5\ \text{cm} = 0.05\ \text{m}$. 因有 $F(0.05) = 40$ ，即 $0.05k = 40$ ，故得 $k = 800$. 于是可得到 $$F(x) = 800x\ ,$$ 则功元素为 $$\mathrm{d}W = 800x\mathrm{d}x\ .$$ 于是，弹簧从 15 cm 拉长到 18 cm，所做的功为 $$W = \int_{0.05}^{0.08} 800x\mathrm{d}x = [400x^2]_{0.05}^{0.08} = 400(0.0064 - 0.0025) = 1.56\ (\text{J})\ .$$  **图 7-19** 于是所求的功为 $$W = \int_0^5 88.2\pi x\mathrm{d}x = 88.2\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = 1102.5\pi\ (\text{kJ})$$  **图 7-20**	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法 学习定积分在物理学上的应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

【教师】讲解定积分在“水压力”问题中的应用

由物理学知识可知：在水深为 h 处点的压强为 $p=\rho gh$，这里 ρ 是水的密度，如果有一面积为 A 的平板水平地放置在水深 h 处，那么平板一侧所受的水压力为 $F=pA$.

如果这个平板铅直放置在水中，那么由于水深不同，平板上各点处的压强 p 也不相等，所以平板所受水的压力就不能用上述方法计算.

例 3　一矩形闸门垂直立于水中，宽为 10 m，高为 6 m，问闸门上边界在水面下多少米时，它所受的压力等于上边界与水面相齐时所受压力的两倍.

解　设所求高度为 h，建立如图 7-21 所示的坐标系，任取小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$，小区间上压力元素为

$$\mathrm{d}F=10\rho gx\mathrm{d}x .$$

于是，由题意得

$$\int_h^{h+6}10\rho gx\mathrm{d}x=2\int_0^6 10\rho gx\mathrm{d}x ,$$

即

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_h^{h+6}=2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^6$$

解得 $h=3$.

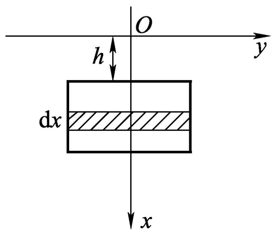


图 7-21

<table>
<tr><th>课时分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及手段</th></tr>
<tr><td>知识讲解
45M</td><td>

【教师】讲解定积分在经济分析中的应用

在经济问题中，常常要涉及总产量、总收入、总成本等许多经济总量，这些总量可由其边际量通过积分方法求得．一般地，有以下几种常见的情况：

（1）已知边际成本 $C'(q)$，固定成本 C_0，则总成本的函数为

$$C(q)=\int_0^q C'(q)\mathrm{d}q+C_0 \text{ 或 } \begin{cases} C(q)=\int C'(q)\mathrm{d}q, \\ C(0)=C_0, \end{cases}$$

产量由 a 变到 b 时，总成本的改变量为

$$\Delta C=\int_a^b C'(q)\mathrm{d}q \text{ 或 } \Delta C=C(b)-C(a);$$

（2）已知边际收入 $R'(q)$，则总收入函数为

$$R(q)=\int_0^q R'(q)\mathrm{d}q \text{ 或 } \begin{cases} R(q)=\int R'(q)\mathrm{d}q, \\ R(0)=0, \end{cases}$$

产量由 a 变到 b 时，总收入的改变量为

$$\Delta R=\int_a^b R'(q)\mathrm{d}q \text{ 或 } \Delta R=R(b)-R(a);$$

（3）已知固定成本 C_0，边际利润 $L'(q)$，则总利润函数为

$$L(q)=\int_0^q L'(q)\mathrm{d}q-C_0 \text{ 或 } \begin{cases} L(q)=\int L'(q)\mathrm{d}q, \\ L(0)=-C_0, \end{cases}$$

产量由 a 变到 b 时，总利润的改变量为

$$\Delta L=\int_a^b L'(q)\mathrm{d}q \text{ 或 } \Delta L=L(b)-L(a).$$

例 1　设某产品的边际成本为 $C'(q)=10q+28$，固定成本为 50．求总成本函数 $C(q)$．

解法一　$C(q)=\int_0^q C'(t)\mathrm{d}t+C_0=\int_0^q(10t+28)\mathrm{d}t+50$

$$=[5t^2+28t]_0^q+50=5q^2+28q+50.$$

解法二　$C(q)=\int C'(q)\mathrm{d}q=\int(10q+28)\mathrm{d}q=5q^2+28q+C$，

又因为 $C(0)=50$，所以 $C=50$，故

$$C(q)=5q^2+28q+50.$$

例 2　已知某产品的销售量为 q 时，收入变化率为 $R'(q)=100-q$．求

（1）销售量为 10 时的总收入；

（2）销售量从 20 到 30 时，总收入是多少？

</td><td>讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法
学习定积分在经济分析中的应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

解　（1）$R(10)=\int_0^{10}R'(q)\mathrm{d}q=\int_0^{10}(100-q)\mathrm{d}q=\left[100q-\frac{1}{2}q^2\right]_0^{10}=950$，即销售量为 10 时，总收入为 950；

（2）$R(30)-R(20)=\int_{20}^{30}R'(q)\mathrm{d}q=\int_{20}^{30}(100-q)\mathrm{d}q=\left[100q-\frac{1}{2}q^2\right]_{20}^{30}=750$，即销售量从 20 到 30 时总收入为 750.

例 3　某企业每月生产某种产品 q 个单位时，其边际成本函数为 $C'(q)=5q+10$（单位：万元），固定成本为 20 万元，边际收益为 $R'(q)=60$（单位：万元）．求：

（1）每月生产多少个单位产品时，利润最大？

（2）当利润达到最大时，再多生产 10 个单位，利润将有什么变化？

解　（1）因为 $L'(q)=R'(q)-C'(q)=60-(5q+10)=50-5q$．要使利润最大，应有 $L'(q)=0$，即 $50-5q=0$，解得 $q=10$．又因 $L''(q)=-5<0$，故唯一的驻点 $q=10$ 即为最大值点．所以每月生产 10 个单位产品时利润最大.

（2）再多生产 10 个单位产品时，利润变化为

$$\Delta L=\int_{10}^{20}L'(q)\mathrm{d}q=\int_{10}^{20}(50-5q)\mathrm{d}q=\left[50q-\frac{5}{2}q^2\right]_{10}^{20}=-250,$$

所以，再多生产 10 个单位时，利润将减少 250 万元.

【学生】掌握定积分在经济分析中的应用

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 15 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 27 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="2">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="5">授课题目（教学章、节或主题）： 第七章　微分方程
第一节　微分方程的基本概念</td></tr>
<tr><td colspan="5">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）掌握函数微分方程的基本概念。
思政育人目标：
由具体问题引出微分的定义，使学生体会到数学是源于生活的，是对实际问题的抽象产生的，不是脱离实际生活的；引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯；培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；树立学生实事求是、一丝不苟的科学精神；引导学生运用所学知识揭示生活中的奥秘，在实践中深化认识，达到学以致用的目的。</td></tr>
<tr><td colspan="5">教学重点及难点：
教学重点：函数微分方程的基本概念
教学难点：函数微分方程的基本概念
应对策略：在教法上采用问题驱动法、引导探究法、讲练结合法，发挥学生的积极主动性，重类比、迁移。</td></tr>
<tr><td colspan="5">作业、讨论题、思考题：
习题 7-1　T1　T4</td></tr>
<tr><td colspan="5">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了常微分方程的基本概念及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点
■教学反思
本节课效果不错，学生学习的积极性很大，这主要是因为在教学过程中带入了实际问题。数学的抽象性离不开直观形象，将抽象与形象相结合，符合人们认识事物的习惯与规律，降低了理论学习的难度，有利于学生理性认识与感性认识的结合。</td></tr>
</table>

下节课预习重点：

可分离变量的微分方程

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

<table>
<tr><th>课时
分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及
手段</th></tr>
<tr><td>知识
讲解

45M</td><td>

【教师】在引例中由具体问题引出微分的定义，为微分的应用的做好理论铺垫

例 1（曲线方程） 一曲线通过点 $(0,1)$ 且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处切线的斜率为 $2x$，求该曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为 $y=f(x)$．根据导数的定义，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x, \tag{5-1}$$

即 $\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x$，

等式两端同时积分得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C,$$

其中 C 为任意常数．又因为曲线通过点 $(0,1)$，代入上式，解出 $C=1$．因此，所求曲线方程为

$$y=x^2+1.$$

例 2（自由落体运动） 在离地面高度为 S_0 处，将一小球以初速度 V_0 垂直上抛，若不计空气阻力，求物体的运动方程，计算物体何时回到原处？

解 设小球的运动方程为 $S=S(t)$，如图 5-1 所示建立坐标系．由于小球仅受重力作用（不计空气阻力），因此其加速度就是重力加速度，由此可得

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=-g, \tag{5-2}$$

上式中的负号是因为重力方向与选定的正方向相反．对上式两端积分一次得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-gt+C_1, \tag{5-3}$$

再积分一次得

$$S=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{5-4}$$

其中 C_1，C_2 都是任意常数.

由题意可知

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=V_0,\quad S|_{t=0}=S_0,$$

将它们分别代入式（5-3）和式（5-4）可得

$$C_1=V_0,\quad C_2=S_0,$$

即所求物体的运动方程为

$$S=-\frac{1}{2}gt^2+V_0t+S_0.$$

</td><td>讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法
学习常微分方程的基本概念，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

当 $S=S_0$ 时，可得 $t_1=0$，$t_2=\dfrac{2V_0}{g}$，因此，经过 $\dfrac{2V_0}{g}$ 秒后，小球回到原处.

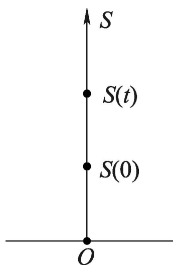


图 5-1

例 3（死亡年代的测定）　人体死亡之后，体内 C^{14} 的含量就不断减少．已知 C^{14} 的衰变速度与当时体内 C^{14} 的含量成正比，试建立任意时刻遗体内 C^{14} 含量应满足的方程.

解　设 t 时刻遗体内 C^{14} 的含量为 $p=p(t)$，由题意可得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-kp\ (k\ \text{为常数，且}\ k>0),$$

等式右边的负号表示随着时间 t 的增加，$p(t)$ 在减少.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **45M**	**【教师】讲解常微分方程的基本概念，并通过例题介绍其应用** 定义 1　含有自变量、未知函数以及未知函数导数或微分的方程，称为微分方程，简称方程．未知函数为一元函数的方程称为常微分方程；未知函数为多元函数的方程称为偏微分方程．本章只讨论常微分方程． 定义 2　微分方程中所含未知函数导数的最高阶数称为微分方程的阶． 例 1 得到的式（5-1）、例 2 得到的式（5-3）所含未知函数的导数都为一阶导数，因此，这两个方程为一阶微分方程；例 2 得到的式（5-2）所含未知函数的导数为二阶导数，因此它是二阶微分方程；而方程 $y'''-2y'+3x^2=0$ 则是三阶微分方程． 一般地，n 阶微分方程记为 $$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,\qquad（5\text{-}5）$$ 其中，F 是 $n+2$ 个变量的函数，x 为自变量，y 为 x 的未知函数，而 $y',\cdots,y^{(n)}$ 依次是未知函数 y 的一阶、二阶，…，n 阶导数． 如果能从式（5-5）中解出最高阶导数，则微分方程还可写为 $$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})\qquad（5\text{-}6）$$ 若微分方程中未知函数 y 及其各阶导数 $y',\cdots,y^{(n)}$ 都是一次的（且不含交叉乘积），则称为线性方程，否则称为非线性方程． 定义 3　任何能满足微分方程的函数都称为微分方程的解．如果 n 阶微分方程的解中含有 n 个彼此独立的任意常数，则称为方程的通解．通解中的任意常数确定后，则称其为特解． 定义 4　用来确定任意常数的条件称为初始条件或初值条件． 求一阶微分方程 $y'=f(x,y)$ 满足初始条件 $y\|_{x=x_0}=y_0$ 的特解的问题，称为一阶微分方程的初值问题，记作 $$\begin{cases}y'=f(x,y),\\ y\|_{x=x_0}=y_0.\end{cases}\qquad（5\text{-}7）$$ 微分方程特解的图形是一条曲线，称为微分方程的积分曲线，通解的图形是一族相互平行的曲线（有无数多条），称为积分曲线族，如图 5-2 所示．	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法

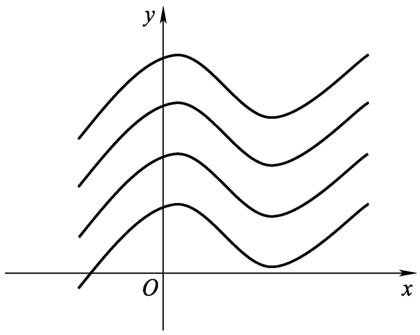


图 5-2

例 4　验证函数 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$（$C_1$，$C_2$ 为任意常数）是二阶微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解.

证明　因为

$$y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x,$$

$$y'' = 4C_1 e^{-2x} + C_2 e^x,$$

将 y，y'，y'' 代入方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 左边得

$$4C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 2C_1 e^{-2x} - 2C_2 e^x = 0,$$

因此，函数 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$ 是方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解.

【学生】掌握常微分方程的基本概念

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 16 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 28 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">授课题目（教学章、节或主题）： 第七章　微分方程
第二节　可分离变量的微分方程</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）掌握可分离变量微分方程的解法。
思政育人目标：
由具体问题引出微分的定义，使学生体会到数学是源于生活的，是对实际问题的抽象产生的，不是脱离实际生活的；引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯；培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；树立学生实事求是、一丝不苟的科学精神；引导学生运用所学知识揭示生活中的奥秘，在实践中深化认识，达到学以致用的目的。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学重点及难点：
教学重点：可分离变量微分方程的概念
教学难点：可分离变量微分方程的解法
应对策略：本堂课教学设计采用首尾呼应，从计算文物年代这一实际问题引入变量分离方程，重点讲授变量分离方程及其解法，然后应用所学数学知识解决文物年代问题，让学生切实感受常微分方程的根源深扎在各种实际问题之中。同时，文物年代这一问题给枯燥的数学课堂增加了人文性，渗透思政，提升学生的民族认同感。</td></tr>
<tr><td colspan="6">作业、讨论题、思考题：
习题 7-2　T1　T4</td></tr>
<tr><td colspan="6">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了可分离变量微分方程的基本概念及其应用，可分离变量微分方程的解法。课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点
■教学反思
本节课效果不错，学生学习的积极性很大，这主要是因为在教学过程中带入了实际</td></tr>
</table>

问题。数学的抽象性离不开直观形象，将抽象与形象相结合，符合人们认识事物的习惯与规律，降低了理论学习的难度，有利于学生理性认识与感性认识的结合。

下节课预习重点：

齐次型微分方程、一阶线性微分方程

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

<table>
<tr><th>课时
分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及
手段</th></tr>
<tr><td>知识
讲解

45M</td><td>

【教师】讲解可分离变量微分方程的解法，并通过例题介绍其应用

求解形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$ 的一阶微分方程，就是求函数 $f(x)$ 的原函数，等式两边直接积分即可求解．但并不是所有一阶微分方程方程都可以这样直接积分求解，例如，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy\quad,$$

该方程与上面方程不同的是等式右边有未知量 y，而 y 恰是我们要求的关于 x 的函数，故无法参与积分．但将该方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x\,,$$

则解决了上述问题，等式两边积分得

$$\ln|y|=x^2+C_1\,.$$

类似地，还有上一节中例 3 的微分方程 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-kp$（$k$ 为常数，且 $k>0$），也不可以直接积分求解，应采用上述方法先变形后再积分．这种变形法称为分离变量法，可以分离变量的方程称为可分离变量方程．

定义 1　如果一阶微分方程可以化为

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x \tag{5-8}$$

的形式，则称该方程为可分离变量的微分方程．

这类微分方程总能经过简单的代数运算，将不同的变量与微分分离到方程的两边，具体的解法如下．

第一步：分离变量，将方程化为式（5-8）的形式，使方程两边都仅含一个变量．

第二步：等式两端积分，可得

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x\,.$$

设 $G(y)$ 和 $F(x)$ 分别表示 $g(y)$ 和 $f(x)$ 的原函数，C 为任意常数，则式（5-8）的通解为

$$G(y)=F(x)+C\,. \tag{5-9}$$

例 1　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=0$ 的通解．

解　当 $y\neq0$ 时，将方程分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=x\mathrm{d}x\,,$$

两边积分，得

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int x\mathrm{d}x\,,$$

</td><td>讲授法、
问答法、
讨论法、
演示法、
实践法</td></tr>
</table>

$$\ln|y|=\frac{1}{2}x^2+C_1,$$

即

$$|y|=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+C_1},$$

所以

$$y=\pm\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+C_1}=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}.$$

当 C_1 取遍任何实数时，$\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 取遍了除零以外的任何实数．那么记 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$，于是有

$$y=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\ (C\neq 0). \tag{5-11}$$

显然，$y=0$ 也是原方程的解，那么在式(5-11)中，若 $C=0$ 即可以得到 $y=0$ 这个解，因此，方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\ (C\text{ 为任意常数}).$$

说明　为方便起见，在以后解微分方程的过程中，如果积分后出现对数，可以不再详细写出处理绝对值记号的过程，即若已解出

$$\ln|y|=f(x)+C_1,$$

则可以立即写出 $y=C\mathrm{e}^{f(x)}$．

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **30M**	例 2　求 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{2x-y}, \\ y\vert_{x=0}=0 \end{cases}$ 的解. 解　方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{2x-y}$ 是一个可分离变量的微分方程，分离变量后得 $$\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x,$$ 两边积分得 $$\mathrm{e}^{y}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C.$$ 代入初始条件 $y\vert_{x=0}=0$，解得 $C=\dfrac{1}{2}$，所以满足初值问题的特解为 $$\mathrm{e}^{y}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x}+1).$$ 说明　这个解是方程的隐式解，这里没有必要解出 y. 实际上，有些方程只能得到隐式解. 例 3　求解微分方程 $x(y^2-1)\mathrm{d}x+y(x^2-1)\mathrm{d}y=0$. 解　由式（5-10）可知，这是一个可分离变量的微分方程，分离变量后得 $$\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y=-\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x,$$ 两边积分得 $$\ln\vert y^2-1\vert=-\ln\vert x^2-1\vert+\ln\vert C\vert,$$ 即 $$(y^2-1)(x^2-1)=C.$$ 例 4　设 $p(x)$ 为连续函数，求解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0$. 解　这是一个可分离变量的微分方程. 当 $y\neq 0$ 时，分离变量后，得 $$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-p(x)\mathrm{d}x,$$ 两边积分得	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法

课堂 测验 **10M** 课堂 小结 **5M**	$$\ln\|y\| = -\int p(x)\mathrm{d}x + C_1,$$ 即 $$y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \qquad (5\text{-}12)$$ 这里把 $\int p(x)\mathrm{d}x$ 看成是 $p(x)$ 的一个确定的原函数，不含积分常数．同时，在式（5-12）中，若 $C=0$，则 $y=0$，仍然是原方程的解，因此式（5-12）是方程的通解． **【学生】掌握可分离变量微分方程的解法** **【学生】理解曲率圆与曲率半径** **【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况** **【学生】做测试题目** **【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程** **【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧** **【教师】简要总结本节课的要点** 本节课学习了常微分方程的基本概念及其应用，可分离变量微分方程的解法。课后大家要多加练习，巩固认知。 **【学生】总结回顾知识点**	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 16 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 29 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课▫ 实验课▫ 习题课▫ 其他▫</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">授课题目（教学章、节或主题）： 第七章　微分方程
第三节　齐次方程
第四节　一阶线性微分方程</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）掌握齐次型微分方程的定义和解法；
（2）掌握一阶线性微分方程的定义和解法。
思政育人目标：
在介绍一阶线性微分方程的常数变易法时，在学生体会到这种方法简单明了的同时，介绍该方法的产生却是拉格朗日十一年的研究成果，体现了科学家们在追求真理、 探求知识过程中的宝贵工匠精神。由此教育学生在学习任何知识时都不能急于求成，要有不怕困难、勇往直前的勇气与斗志。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学重点及难点：
教学重点：齐次型微分方程和一阶线性微分方程的定义
教学难点：齐次型微分方程和一阶线性微分方程的解法
应对策略：一阶线性微分方程的求解一般采用常数变异法，通过常数变易法，可求出一阶线性微分方程的通解：先求解一阶线性非齐次微分方程所对应的齐次方程，将所得通解中的常数变为一个未知函数。为了求出这个未知函数，将该含有未知函数的解代入原方程解出这个未知函数，从而得到原方程的通解。</td></tr>
<tr><td colspan="6">作业、讨论题、思考题：
习题 7-3　T1　T2
习题 7-4　T1　T3</td></tr>
<tr><td colspan="6">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了齐次型微分方程和一阶线性微分方程的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点
■教学反思
本节课发现部分学生缺乏练习，无法将所学知识很好地应用到题目中。在今后的教</td></tr>
</table>

学中应更加注重课堂练习环节的作用，将其与平时成绩紧密结合，让学生自主参与，消除学生的惰性，培养学生良好的学习习惯。

下节课预习重点：

可降阶的微分方程、二阶线性微分方程解的结构

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

<table>
<tr><td>课时分配</td><td>教 学 内 容</td><td>方法及手段</td></tr>
<tr><td>知识讲解
45M</td><td>

【教师】讲解齐次型微分方程，并通过例题介绍其应用

定义 2　一阶微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 中，若 $f(x,y)$ 能写成 $\frac{y}{x}$ 的函数，即

$$f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

则称

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (5\text{-}13)$$

为齐次型微分方程，简称齐次方程.

齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 不是可分离变量的微分方程，通过变量代换，可变成关于新变量的可分离变量的微分方程．下面我们来讨论具体的解法.

令 $u=\frac{y}{x}$，则有 $y=ux$，因此，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

代入式（5-13）中得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u),$$

再分离变量可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

求出积分后，再以 $\frac{y}{x}$ 代替 u，就可以得齐次方程（5-13）的通解.

例 5　求微分方程 $xy'=y(\ln y-\ln x)$ 的通解.

解　将方程整理后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x},$$

这是一个齐次方程，令 $u=\frac{y}{x}$，则方程可化为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u\ln u,$$

分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

</td><td>讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法
学习齐次型微分方程。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

积分得

$$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln|C|\,(C\neq 0),$$

于是有

$$\ln u-1=Cx,$$

$$u=e^{Cx+1}\ (C\neq 0),$$

代回原变量$u=\dfrac{y}{x}$得原方程的解为

$$y=xe^{Cx+1}\ (C\neq 0).$$

当$\ln u-1=0$时，$\dfrac{y}{x}=e$，即$y=ex$也是原方程的解．此解可从上述解中取$C=0$得到．因此，

$$y=xe^{Cx+1}\ (C\text{为任意常数})$$

是原方程的通解．

例 6　求方程$x^2\dfrac{dy}{dx}+y^2=xy\dfrac{dy}{dx}$通解．

解　将方程整理后得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}-1}.$$

令$u=\dfrac{y}{x}$，将$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$代入上式，得

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1},$$

即

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1},$$

分离变量得

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)du=\frac{1}{x}dx,$$

积分得

$$u-\ln|u|=\ln|x|+C_1,$$

即

$$\ln|xu|=u-C_1.$$

将$u=\dfrac{y}{x}$代入得

$$\ln|y|=\frac{y}{x}-C_1,$$

即

$$y=Ce^{\frac{y}{x}}.$$

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **40M**	**【教师】讲解一阶线性微分方程，并通过例题介绍其应用** 定义 3　形如 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \quad (5\text{-}14)$$ 的方程称为一阶线性微分方程（因为它对于未知函数 y 及其导数 y' 是一次方程），其中 $P(x)$， $Q(x)$ 是 x 的已知连续函数． 当 $Q(x)\neq 0$ 时，式（5-14）称为一阶线性非齐次微分方程， $Q(x)$ 称为自由项或非齐次项．当 $Q(x)=0$ 时，式（5-14）变为 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0\text{，} \quad (5\text{-}15)$$ 称为对应于式（5-14）的一阶线性齐次微分方程． 下面讨论一阶线性微分方程的解法．通过本节例 4 可知一阶线性齐次微分方程即式（5-15）的通解为 $$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\text{．} \quad (5\text{-}16)$$ 显然，它不是线性非齐次方程即式（5-14）的解．这两个方程的区别在于式（5-14）的右端为自由项 $Q(x)$．因此，可以设想将齐次方程通解中的常数 C 换成 x 的未知函数 $u(x)$，即 $$y=u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\text{，} \quad (5\text{-}17)$$ 则有可能为式（5-14）的解．将 $y=u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 及其导数 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-u(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$ 代入式（5-14）中得 $$u'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-u(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+u(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)\text{，}$$ 化简得 $$u'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\text{，}$$ 积分后得 $$u(x)=\int[Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}]\mathrm{d}x+C\text{，}$$ 再代入式（5-17），便可得非齐次线性方程即式（5-14）的通解为 $$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right] \quad (5\text{-}18)$$	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法

	或 $$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\ . \qquad (5\text{-}19)$$ 式（5-19）等号右端第一项恰好是齐次线性方程即式（5-15）的通解，第二项是非齐次方程即式（5-14）的一个特解（式（5-18）中令 $C=0$ ）．由此可知： **一阶线性非齐次微分方程的通解等于该方程的一个特解及与其对应的线性齐次微分方程的通解之和**．这就是一阶线性非齐次微分方程通解的结构． 上面所采用的方法，即将齐次方程的通解中的任意常数项 C 换成 x 的未知函数代入方程，求非齐次方程通解的方法，称为**常数变易法**．用常数变异法求解非齐次线性方程通解的步骤如下： （1）先求对应齐次方程的通解 $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ ； （2）将齐次方程的通解中的常数 C 换成 x 的未知函数 $u(x)$ ，并把 $y=u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 代入非齐次方程求出 $u(x)$ ，然后写出非齐次方程的通解． **例 7**　求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\cos x}{x}$ 的通解． **解法一**　常数变易法． 先求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=0$ 的通解，当 $y\neq 0$ 时，分离变量得 $$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$ 两边积分得 $$\ln\lvert y\rvert=-\ln\lvert x\rvert+\ln\lvert C\rvert,$$ 其中 C 为非零任意常数，化简得 $$y=\frac{C}{x}.$$ 由于 $y=0$ 也是该方程的解，可由上式 $C=0$ 得到，所以齐次方程的通解就是 $$y=\frac{C}{x},$$ 其中 C 为任意常数．	
课堂 小结 **5M**	**【教师】简要总结本节课的要点** 本节课学习了齐次型微分方程和一阶线性微分方程的相关知识及其应用，了解了伯努利方程。课后大家要多加练习，巩固认知。 **【学生】总结回顾知识点**	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 16 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 30 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
</table>

授课题目（教学章、节或主题）： 第七章　微分方程
第五节　可降阶的高阶微分方程
第六节　高阶线性微分方程

教学目的与要求：

知识技能目标：

（1）掌握可降阶的微分方程的解法；

（2）理解二阶线性微分方程解的结构。

思政育人目标：

通过学习可降阶的微分方程的解法和二阶线性微分方程解的结构，培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯；树立学生实事求是、一丝不苟的科学精神。

教学重点及难点：

教学重点：二阶线性微分方程解的结构

教学难点：可降阶的微分方程的解

应对策略：对于二阶及二阶以上的微分方程(即高阶微分方程)，原则上讲，可以通过适当的变量替换化成低阶的方程来求解。

作业、讨论题、思考题：

习题 7-5　T1　T5

习题 7-6　T2　T4

课后小结：

■ **【教师】简要总结本节课的要点**

本节课学习了齐次型微分方程和一阶线性微分方程的相关知识及其应用，了解了伯努利方程。课后大家要多加练习，巩固认知。

■ **【学生】总结回顾知识点**

■ **教学反思**

本节课效果不错，通过复习测验，发现学生对于本章知识都掌握的不错，只出现了一些小问题。教师对学生进行了鼓励，并针对出现的小问题进行了讲解，排除了学生的学习隐患。

下节课预习重点：

常系数齐次线性微分方程

参考文献：

【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023.

【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005.

【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

<table>
<tr><th>课时分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及手段</th></tr>
<tr><td>知识讲解
45M</td><td>

【教师】引入降阶求解高阶微分方程的概念

二阶及二阶以上的微分方程统称为高阶微分方程.

求解高阶微分方程的方法之一就是降阶，若高阶微分方程可降为一阶微分方程，那么就可以应用前面所介绍的方法去求解.

设二阶微分方程

$$y''=f(x,y,y'),$$

其中 f 为含有 x，y，y' 三个变量的函数.

本节中主要介绍三类可降阶的二阶微分方程的解法.

【教师】讲解降阶求解 $y''=f(x)$ 型方程的方法，并通过例题介绍其应用

$y''=f(x)$ 型方程的特点是等式右端只是 x 的函数，不出现 y 及 y'.

令 $y'=P(x)$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$. 于是原方程可降为一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=f(x),$$

等式两边积分可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

再积分一次，可得原方程的通解为

$$y=\int P(x)\mathrm{d}x+C_2=\int\left[\int f(x)\mathrm{d}x+C_1\right]\mathrm{d}x+C_2,$$

其中 C_1，C_2 为任意常数.

例 1　求微分方程 $y''=\sin x+x$ 的通解.

解　对原方程两边关于 x 积分一次，可得

$$y'=\int(\sin x+x)\mathrm{d}x=-\cos x+\frac{1}{2}x^2+C_1,$$

再积分一次，得原方程的通解

$$y=\int\left(-\cos x+\frac{1}{2}x^2+C_1\right)\mathrm{d}x=-\sin x+\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2,$$

其中 C_1，C_2 为任意常数.

【教师】讲解降阶求解 $y''=f(x,y')$ 型方程的方法，并通过例题介绍其应用

$y''=f(x,y')$ 型方程的特点是等式右端未明显包含变量 y. 如果令 $y'=P(x)$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$，代回原方程，得

</td><td>讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法
学习可降阶的微分方程的解法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=f(x,P),$$

这是一个关于变量 P ， x 的一阶微分方程，可按一阶微分方程的解法求解．设其求得的通解为

$$P(x)=\varphi(x,C_1),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x,C_1),$$

等式两边积分一次，即可求得原方程的通解

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2,$$

其中 C_1 ， C_2 为任意常数．

例 2　求微分方程 $y''=\dfrac{y'}{1+2x}$ ．

解　原方程中不显含 y ，故设 $y'=P(x)$ ，则 $y''=P'$ 代入原方程，得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=\frac{P}{1+2x}.$$

这是一阶微分方程，分离变量可得

$$\frac{\mathrm{d}P}{P}=\frac{\mathrm{d}x}{1+2x},$$

等式两端积分，解得

$$P=C_0(1+2x)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{即 } y'=C_0(1+2x)^{\frac{1}{2}},$$

再将上式两边积分得

$$y=C_1(1+2x)^{\frac{3}{2}}+C_2\left(C_1=\frac{1}{3}C_0\right),$$

其中 C_1 ， C_2 为任意常数．

【教师】讲解降阶求解 $y''=f(y,y')$ 型方程的方法，并通过例题介绍其应用

$y''=f(y,y')$ 型方程的特点是等式右端不明显包含自变量 x．同样采用变量替换的方法，令 $y'=P(y)$，由复合函数求导法则有

$$y''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y')=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y},$$

代入原方程得

$$P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=f(y,P).$$

这是一个关于 y，P 的一阶微分方程，若能求出其通解 $P=\varphi(y,C_1)$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1),$$

则可分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=\mathrm{d}x,$$

两边积分，可得原方程的通解

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2,$$

其中 C_1，C_2 为任意常数.

例 3　求微分方程 $yy''-y'^2=0$ 的通解.

解　方程不明显包含自变量 x，故设 $y'=P(y)$，则 $y''=P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$，代入原方程，得

$$yP\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}-P^2=0.$$

当 $y\neq 0$，$P\neq 0$ 时，变量分离可得

$$\frac{\mathrm{d}P}{P}=\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

两边积分得

$$\ln|P|=\ln|y|+C_0,$$

再次分离变量并积分解得

$$\ln|y|=C_1x+C_2',$$

整理得

$$y=C_2\mathrm{e}^{C_1x}\ (C_2=\pm\mathrm{e}^{C_2'}).$$

$$y=C_2\mathrm{e}^{C_1x}\ (C_1，C_2 \text{ 为任意常数}).$$

<table>
<tr><th>课时分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及手段</th></tr>
<tr><td>知识讲解

30M</td><td>

【教师】讲解二阶线性微分方程解的结构

定义 1　形如

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \quad (5\text{-}22)$$

的微分方程称为二阶线性微分方程．其中 $p(x)$，$q(x)$，$f(x)$ 为定义在某区间 I 上的连续函数，若 $f(x)\neq 0$，则称方程是非齐次方程，若 $f(x)=0$，则方程（5-22）变为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0\,, \quad (5\text{-}23)$$

它称为对应于（5-22）的齐次方程， $f(x)$ 称为自由项．

本节将讨论方程（5-22）及（5-23）解的基本性质，并将这些性质推广到 n 阶线性微分方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+p_n(x)y=f(x) \quad (5\text{-}24)$$

【教师】讲解二阶齐次线性微分方程解的结构，并通过例题介绍其应用

定理 1　设 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 都是方程（5-23）的解，则 $C_1y_1+C_2y_2$ 也是该方程的解，其中 C_1，C_2 为任意常数．

证明　因为 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 都是方程（5-23）的解，将 $C_1y_1+C_2y_2$ 代入方程（5-23）可得

$$(C_1y_1''+C_2y_2'')+p(x)(C_1y_1'+C_2y_2')+q(x)(C_1y_1+C_2y_2)$$
$$=C_1[y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1]+C_2[y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2]=0\ .$$

故 $C_1y_1+C_2y_2$ 也是方程（5-23）的解．

注：（1）此定理说明齐次线性方程的解符合叠加原理．

（2） $C_1y_1+C_2y_2$ 称为 y_1 与 y_2 的线性组合．

（3） $C_1y_1+C_2y_2$ 虽然含有两个任意常数，但它未必为方程（5-23）的通解．

定义 2　设 $y_1(x)$，$y_2(x)$，$\cdots$，$y_n(x)$ 为定义在某区间 I 上的 n 个函数，如果存在 n 个不全为零的常数 k_1，k_2，$\cdots$，k_n， 使得 $\forall x\in I$ 时，恒有等式

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)=0$$

成立，则称这 n 个函数在区间 I 上线性相关，否则称为线性无关．

</td><td>讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法</td></tr>
</table>

例 1　讨论下列函数的线性相关性：

（1）$1, \cos^2 x, \sin^2 x$；　　　　　　（2）$1, x, x^2$.

证明　（1）因为 $\forall x \in \mathbf{R}$，只需取 $k_1 = 1$，$k_2 = k_3 = -1$，就有

$$1 - \cos^2 x - \sin^2 x = 0,$$

故 1，$\cos^2 x$，$\sin^2 x$ 在 $\mathbf{R}$ 上线性相关.

（2）对 1，x，x^2 而言，如果 k_1，k_2，k_3 不全为 0，则在区间 (a, b) 内至多存在两个点，使得

$$k_1 + k_2 x + k_3 x^2 = 0.$$

要使上式恒等于 0，则必须 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$，故 1，x，x^2 在任意区间 (a, b) 内部线性无关.

特别地，对两个函数而言，y_1，y_2 线性相关的充要条件是 $\dfrac{y_1}{y_2} = k$（k 为非零常数）. 由此我们可以得到以下的结论.

定理 2　如果 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 是方程（5-23）的两个线性无关的解，则线性组合 $C_1 y_1 + C_2 y_2$（C_1，C_2 为任意常数）是该方程的通解.

证明　由定理 1 可知 $C_1 y_1 + C_2 y_2$ 是方程（5-23）的解，又由于 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 线性无关，故 $y_1(x) \neq k y_2(x)$，即 C_1，C_2 两个任意常数不能合并，是相互独立的，故线性组合 $C_1 y_1 + C_2 y_2$ 是方程（5-23）的通解.

推论 1　设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是 n 阶线性方程（5-24）的 n 个线性无关的解，则此方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

其中，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为任意常数.

【教师】讲解二阶非齐次线性微分方程解的结构，并通过例题介绍其应用

定理 3　设 $y^*(x)$ 是方程（5-22）的一个特解，$Y(x)$ 是对应的齐次方程（5-23）的通解，则 $y = Y(x) + y^*(x)$ 是非齐次方程（5-22）的通解.

证明　将 $y = Y(x) + y^*(x)$ 代入方程（5-22）得

$$(Y'' + y^{*''}) + p(x)(Y' + y^{*'}) + q(x)(Y + y^*)$$

$$= [Y'' + p(x)Y' + q(x)Y] + [y^{*''} + p(x)y^{*'} + q(x)y^*] = 0 + f(x) = f(x)$$ 故

$y = Y(x) + y^*(x)$ 是方程（5-22）的解，且 $Y(x)$ 中含有 2 个独立的任意常数，故 y 是方程（5-22）的通解.

推论 2　设 $y^*(x)$ 是 n 阶线性非齐次方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = f(x) \qquad (5\text{-}25)$$

的特解，$Y(x)$ 是对应的齐次方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

的通解，则 $y = Y(x) + y^*(x)$ 是方程（5-25）的通解.

	推论 3　设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程（5-22）的两个解，则 $y=y_1(x)-y_2(x)$ 是对应齐次方程（5-23）的通解． 推论 4　设非齐次方程（5-22）右端 $f(x)$ 是几个函数之和，不妨设 $$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)\text{，}\qquad（5\text{-}26）$$ 而 y_1^* 与 y_2^* 分别是方程 $$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$$ 和 $$y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$$ 的特解，则 $y=y_1^*+y_2^*$ 是方程（5-26）的特解． 证明　将 $y=y_1^*+y_2^*$ 代入方程（5-26）得 $$(y_1^{*\prime\prime}+y_2^{*\prime\prime})+p(x)(y_1^{*\prime}+y_2^{*\prime})+q(x)(y_1^*+y_2^*)$$ $$=[y_1^{*\prime\prime}+p(x)y_1^{*\prime}+q(x)y_1^*]+[y_2^{*\prime\prime}+p(x)y_2^{*\prime}+q(x)y_2^*]=f_1(x)+f_2(x)$$ 故 $y=y_1^*+y_2^*$ 是方程（5-26）的特解． 这个定理说明非齐次线性方程的解符合叠加原理，并可推广到 n 阶非齐次线性方程．	
课堂测验 10M	**【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况** **【学生】做测试题目** **【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程** **【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧**	
课堂小结 5M	**【教师】简要总结本节课的要点** 本节课学习了齐次型微分方程和一阶线性微分方程的相关知识及其应用，了解了伯努利方程。课后大家要多加练习，巩固认知。 **【学生】总结回顾知识点**	

<table>
<tr><td>授课时间</td><td colspan="2">第 17 周</td><td>课次</td><td colspan="2">第 31 次课</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td colspan="3">理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">授课题目（教学章、节或主题）： 第七章 微分方程
第七节 常系数齐次线性微分方程</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学目的与要求：
知识技能目标：
（1）掌握二阶常系数齐次线性微分方程的求解方法。
思政育人目标：
通过学习二阶常系数线性微分方程的解法，培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯；树立学生实事求是、一丝不苟的科学精神。</td></tr>
<tr><td colspan="6">教学重点及难点：
教学重点：二阶常系数齐次线性微分方程的概念
教学难点：二阶常系数齐次线性微分方程的求法
应对策略：若系数和变量无关，都为常数，即为常系数二阶线性齐次微分方程，要求解这个方程，可以先求出它的两个线性无关的特解，再由解的叠加原理得到通解。</td></tr>
<tr><td colspan="6">作业、讨论题、思考题：
习题 7-7 T1 T4</td></tr>
<tr><td colspan="6">课后小结：
■【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了二阶常系数齐次线性微分方程的相关知识及其应用，了解了伯努利方程。课后大家要多加练习，巩固认知。
■【学生】总结回顾知识点
■教学反思
本节课效果不错，学生积极提问，并主动与老师交流。我在课堂教学中认识到，只有主动与学生共同探讨学习中的问题，并以交流、合作、商讨的口气与学生交流心得、体会，才能使学生“亲其师，信其道”，遇到什么问题都愿意与老师讲，寻求老师的帮助。</td></tr>
</table>

下节课预习重点： 常系数非齐次线性微分方程
参考文献： 【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023. 【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005. 【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

<table>
<tr><td>课时分配</td><td>教 学 内 容</td><td>方法及手段</td></tr>
<tr><td>知识讲解
45M</td><td>

【教师】讲解二阶常系数齐次线性微分方程的求解方法，并通过例题介绍其应用

由上节课学习的定理 2 知，要解出方程（5-28）的通解，只要找出其两个线性无关的特解即可．由于方程（5-28）的左端是 y''，y' 及 y 的线性关系式，且 p，q 都是常数，要使 y''，py'，qy 三项之和为零，那么 y''，y'，y 应该是同一类型的函数．而指数函数 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 与其各阶导数只相差一个常数因子，因此可猜想方程（5-28）具有 $y=\mathrm{e}^{rx}$（r 为待定常数）形式的解．下面将 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 代入方程（5-28），看看 r 应该满足什么条件．

对 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 求一阶、二阶导数得

$$y'=r\mathrm{e}^{rx},\quad y''=r^2\mathrm{e}^{rx},$$

把 y''，y'，y 代入方程（5-28）得

$$(r^2+pr+q)\mathrm{e}^{rx}=0,$$

由于 $\mathrm{e}^{rx}\neq 0$，故有

$$r^2+pr+q=0. \tag{5-29}$$

这表明，只要 r 是代数方程（5-29）的根，那么 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 就是微分方程（5-28）的解．代数方程（5-29）称为微分方程（5-28）的**特征方程**，特征方程的根称为**特征根**．这样就把求微分方程解的问题转化为求特征方程根的问题．

根据特征方程（5-29）的根

$$r_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

有相异实根、重根、共轭复根 3 种情形，现分别进行如下讨论．

（1）当 $p^2-4p>0$ 时，特征方程有两个相异的实根 r_1，r_2，此时微分方程（5-28）对应的两个特解为 $y_1=\mathrm{e}^{r_1x}$，$y_2=\mathrm{e}^{r_2x}$．因为

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{\mathrm{e}^{r_1x}}{\mathrm{e}^{r_2x}}=\mathrm{e}^{(r_1-r_2)x}$$

不是常数，故 y_1，y_2 线性无关，方程（5-28）的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}.$$

（2）当 $p^2-4q=0$ 时，特征方程有两个相等的实根，记为 $r=-\frac{p}{2}$，这时可得方程（5-28）的一个特解 $y_1=\mathrm{e}^{rx}$．但还需要再找另一个与 y_1 线性无关的特解 y_2，即 $\frac{y_2}{y_1}\neq$ 常数．故可设 $y_2=u(x)y_1=u(x)\mathrm{e}^{rx}$，其中 $u(x)$ 为待定函数．

</td><td>讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法
学习二阶常系数齐次线性微分方程的求解方法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

假设 y_2 是方程（5-28）的解，且

$$y_2' = \mathrm{e}^{rx}(u' + ru),$$

$$y_2'' = \mathrm{e}^{rx}(u'' + 2ru' + r^2u),$$

将 y_2，y_2'，y_2'' 代入方程（5-28），可得

$$\mathrm{e}^{rx}[(u'' + 2ru' + r^2u) + p(u' + ru) + qu] = 0 .$$

因为 $\mathrm{e}^{rx} \neq 0$，故有

$$u'' + (2r + p)u' + (r^2 + pr + q)u = 0,$$

又因为 $r = -\dfrac{p}{2}$ 为特征根，即

$$2r + p = 0, \quad r^2 + pr + q = 0,$$

故有 $u'' = 0$.

简单起见，取特解 $u = x$，则 $y_2 = xy_1 = x\mathrm{e}^{rx}$ 是方程（5-28）的与 y_1 线性无关的一个特解，故方程（5-28）的通解为

$$y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{rx}\ (C_1，C_2 \text{ 为任意常数}).$$

（3）当 $p^2 - 4q < 0$ 时，特征方程（5-29）有一对共轭复根，设为

$$r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta，r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta,$$

其中 $\alpha = -\dfrac{p}{2}$，$\beta = \dfrac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$，这时微分方程（5-28）有两个复数解，即

$$y_1 = \mathrm{e}^{(\alpha + \mathrm{i}\beta)x}，y_2 = \mathrm{e}^{(\alpha - \mathrm{i}\beta)x} .$$

而实际常用的是实数形式的解，因此还需对上述两个特解做一些处理．应用欧拉公式 $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，可将 y_1，y_2 变形为为

$$y_1 = \mathrm{e}^{(\alpha + \mathrm{i}\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x + \mathrm{i}\beta x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + \mathrm{i}\sin\beta x),$$

$$y_2 = \mathrm{e}^{(\alpha - \mathrm{i}\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x - \mathrm{i}\beta x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - \mathrm{i}\sin\beta x) .$$

记 $\overline{y}_1 = \dfrac{1}{2}(y_1 + y_2) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$，$\overline{y}_2 = \dfrac{1}{\mathrm{i}2}(y_1 - y_2) = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$，由 5.4 节的定理 1 知 $\overline{y}_1$，$\overline{y}_2$ 都是微分方程（5-28）的解，且

$$\frac{\overline{y}_1}{\overline{y}_2} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x}{\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x} = \tan\beta x,$$

不是常数，故 $\overline{y}_1$ 和 $\overline{y}_2$ 线性无关，因此方程（5-28）的通解为

$$y = C_1\overline{y}_1 + C_2\overline{y}_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) .$$

<table>
<tr><th>课时分配</th><th>教 学 内 容</th><th>方法及手段</th></tr>
<tr><td>知识讲解

30M</td><td>综上所述，求解二阶常系数齐次线性方程通解的步骤及结论如下：
（1）写出对应的特征方程 $r^2+pr+q=0$；
（2）求出特征方程的根 r_1，r_2；
（3）根据两个特征根的不同情形，写出微分方程（5-28）的通解，如表 5-1 所示．

表 5-1

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根 ‖ 方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不等实根：$r_1\neq r_2$ ‖ $y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$
两个相等实根：$r_1=r_2$ ‖ $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{rx}$
一对共轭复根：$r=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$ ‖ $y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

例 1　求微分方程 $y''-5y'+6y=0$ 的通解．
解　特征方程为 $r^2-5r+6=0$，解出特征根 $r_1=2$，$r_2=3$，故所求微分方程的通解为
$$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}\ (C_1，C_2\text{ 为任意常数}).$$
例 2　求微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=0$ 的特解．
解　先求出通解，再求满足初始条件的特解．
特征方程为 $r^2-4r+4=0$，特征根为二重根 $r=2$，故微分方程的通解为
$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}.$$
代入 $y|_{x=0}=1$，求得 $C_1=1$；因为
$$y'=2(1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x}(2+C_2+2C_2x),$$
代入 $y'|_{x=0}=0$，求得 $C_2=-2$．故微分方程满足题中初始条件的特解为
$$y=(1-2x)\mathrm{e}^{2x}.$$
例 3　求微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解．
解　特征方程为 $r^2+2r+5=0$，求解得共轭复根为
$$r_{1,2}=\frac{-2\pm\mathrm{i}\sqrt{20-4}}{2}=-1\pm\mathrm{i}2,$$
即 $\alpha=-1$，$\beta=2$，故原方程的通解为
$$y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$</td><td>讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法</td></tr>
<tr><td>课堂测验

15M</td><td>**【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况**

【学生】做测试题目

【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程

【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧</td><td></td></tr>
</table>

【教师】讲解二阶常系数线性非齐次微分方程的求解方法，并通过例题讲解介绍其应用

1． $f(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 型

当 $f(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 时，方程（5-27），变为

$$y''+py'+qy=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\,, \tag{5-30}$$

其中 λ 是常数，$P_n(x)$ 为关于 x 的 n 次多项式

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\,.$$

在前面的讨论中已知，y，y'，y'' 为相同形式的函数，同理，在方程（5-30）中，y，y'，y'' 也应该与方程右端的形式一致．故假设方程（5-30）有形如

$$y^*=Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x} \tag{5-31}$$

的特解，其中 $Q(x)$ 为某个多项式（次数待定）．将

$$y^*=Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\,,$$

$$y^{*\prime}=[\lambda Q(x)+Q'(x)]\mathrm{e}^{\lambda x}\,,$$

$$y^{*\prime\prime}=[\lambda^2Q(x)+2\lambda Q'(x)+Q''(x)]\mathrm{e}^{\lambda x}\,,$$

代入方程（5-30）中，整理可得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_n(x) \tag{5-32}$$

这表明，若 $y^*=Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 是方程（5-30）的解，则 $Q(x)$ 必然是方程（5-32）的解．因此，可以通过方程（5-32）的解 $Q(x)$，进而确定 y^*．由于方程（5-32）的右端为 n 次多项式，故 $Q(x)$ 也应该是多项式．对于多项式 $Q(x)$，其次数及系数就是我们要确定的．下面分情况讨论 $Q(x)$ 的次数及系数．

$Q(x)$ 的系数与 λ 有关．

授课时间	第 17 周	课次	第 32 次课
授课方式 （请打√）	理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□	课时 安排	2

授课题目（教学章、节或主题）： 第七章 微分方程

第八节 常系数非齐次线性微分方程

教学目的与要求：

知识技能目标：

（1）掌握二阶常系数线性非齐次微分方程的求解方法。

思政育人目标：

通过学习二阶常系数非齐次线性微分方程的解法，培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯；树立学生实事求是、一丝不苟的科学精神。

教学重点及难点：

教学重点：二阶常系数非齐次线性微分方程的概念

教学难点：二阶常系数非齐次线性微分方程的求法

应对策略：根据二阶常系数非齐次线性微分方程的类型总结方法，注重学习过程中的总结与归纳。

作业、讨论题、思考题：

习题 7-8 T1 T3

课后小结：

■ **【教师】简要总结本节课的要点**

本节课学习了二阶常系数非齐次线性微分方程的相关知识及其应用，了解了伯努利方程。课后大家要多加练习，巩固认知。

■ **【学生】总结回顾知识点**

■ **教学反思**

本节课效果不错，学生积极提问，并主动与老师交流。我在课堂教学中认识到，只有主动与学生共同探讨学习中的问题，并以交流、合作、商讨的口气与学生交流心得、体会，才能使学生“亲其师，信其道”，遇到什么问题都愿意与老师讲，寻求老师的帮助。

下节课预习重点：
参考文献： 【1】同济大学应用数学系，《高等数学》，高等教育出版社，2023. 【2】北京大学出版社，《大学数学应用教程》，仉志余，2005. 【3】华东师范大学数学系，《数学分析》，高等教育出版社，2001.

课时分配	教 学 内 容	方法及手段
知识讲解 **45M**	**【教师】讲解二阶常系数线性非齐次微分方程的求解方法，并通过例题讲解介绍其应用** 1． $f(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 型 当 $f(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 时，方程（5-27），变为 $$y''+py'+qy=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\text{，}\quad（5\text{-}30）$$ 其中 λ 是常数， $P_n(x)$ 为关于 x 的 n 次多项式 $$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\text{．}$$ 在前面的讨论中已知， y ， y' ， y'' 为相同形式的函数，同理，在方程（5-30）中， y ， y' ， y'' 也应该与方程右端的形式一致．故假设方程（5-30）有形如 $$y^*=Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\quad（5\text{-}31）$$ 的特解，其中 $Q(x)$ 为某个多项式（次数待定）．将 $$y^*=Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\text{，}$$ $$y^{*\prime}=[\lambda Q(x)+Q'(x)]\mathrm{e}^{\lambda x}\text{，}$$ $$y^{*\prime\prime}=[\lambda^2Q(x)+2\lambda Q'(x)+Q''(x)]\mathrm{e}^{\lambda x}\text{，}$$ 代入方程（5-30）中，整理可得 $$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_n(x)\quad（5\text{-}32）$$ 这表明，若 $y^*=Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 是方程（5-30）的解，则 $Q(x)$ 必然是方程（5-32）的解．因此，可以通过方程（5-32）的解 $Q(x)$，进而确定 y^*．由于方程（5-32）的右端为 n 次多项式，故 $Q(x)$ 也应该是多项式．对于多项式 $Q(x)$，其次数及系数就是我们要确定的．下面分情况讨论 $Q(x)$ 的次数及系数． $Q(x)$ 的系数与 λ 有关． （1）若 λ 不是特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根，即 $\lambda^2+p\lambda+q\neq0$，则方程（5-32）中，左端多项式的最高次幂出现在 $Q(x)$ 中。	讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法 学习二阶常系数线性非齐次微分方程的求解方法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

（2）若 λ 是特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的实单根，即满足

$$\begin{cases}\lambda^2+p\lambda+q=0, \\ 2\lambda+p\neq 0,\end{cases}$$

此时，方程（5-32）可简化为

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)=P_n(x).$$

此时 $Q'(x)$ 与 $P_n(x)$ 的次数相同，故 $Q(x)$ 应为 $n+1$ 次多项式，为使讨论的形式简化，我们设 $Q(x)=xQ_n(x)$.

（3）若 λ 是特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的实重根，即满足

$$\begin{cases}\lambda^2+p\lambda+q=0, \\ 2\lambda+p=0,\end{cases}$$

此时，方程（5-32）变为

$$Q''(x)=P_n(x),$$

故 $Q(x)$ 应为 $n+2$ 次多项式，不妨设

$$Q(x)=x^2Q_n(x).$$

综上所述，特解 y^* 和 λ 的关系可以统一表示为

$$y^*=x^kQ_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

其中 $Q_n(x)$ 是与 $P_n(x)$ 同次的多项式，k 根据 λ 不是特征根、是实单根、是实重根分别取 0，1 或 2，如表 5-2 所示.

表 5-2

λ	k	y^*
λ 不是特征根	0	$y^*=Q_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$
λ 是实单根	1	$y^*=xQ_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$
λ 是实重根	2	$y^*=x^2Q_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$

说明　以上结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程．k 是特征方程中特征根 λ 的重复次数.

例 1　求方程 $y''+4y'+4y=3x\mathrm{e}^{-2x}$ 的通解.

解　对应的特征方程为 $r^2+4r+4=0$，特征根 $r_1=r_2=-2$，故对应的齐次方程的通解为

$$Y=(C_1+C_2x)e^{-2x}.$$

因为 $f(x)=3xe^{-2x}$，所以 $\lambda=-2$，$n=1$；又因为 $\lambda=-2$ 是特征方程的二重根，故 $k=2$，即可设 $y^*=x^2(ax+b)e^{-2x}$.

因为

$$y^{*\prime}=e^{-2x}[-2ax^3+(3a-2b)x^2+2bx],$$

$$y^{*\prime\prime}=e^{-2x}[4ax^3+(-12a+4b)x^2+(6a-8b)x+2b],$$

代入原方程，整理得

$$6ax+2b=3x,$$

解得

$$a=\frac{1}{2},\ b=0,$$

于是有

$$y^*=\frac{1}{2}x^3e^{-2x},$$

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{2}x^3e^{-2x}.$$

例 2　求方程 $y''-2y'+3y=2x+1$ 的通解.

解　对应的特征方程为 $r^2-2r+3=0$，特征根 $r_1=1+\sqrt{2}i$，$r_2=1-\sqrt{2}i$，故对应的齐次方程的通解为

$$Y=e^x(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x).$$

因为 $f(x)=2x+1$，所以 $\lambda=0$，$n=1$. 又因为 $\lambda=0$ 不是特征根，故 $k=0$，即可设 $y^*=ax+b$. 因 $y^{*\prime}=a$，$y^{*\prime\prime}=0$，代入原方程，整理得

$$3ax-2a+3b=2x+1,$$

比较方程两边同次幂（同类项）系数得

$$a=\frac{2}{3},\ b=\frac{7}{9},$$

于是有 $y^*=\frac{2}{3}x+\frac{7}{9}$，故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=e^x(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)+\frac{2}{3}x+\frac{7}{9}.$$

2. $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型

当 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 时，方程（5-27）变为

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x],$$

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x],$$

其中 λ，ω 是常实数，$P_l(x)$，$P_n(x)$ 分别为关于 x 的 l，n 次多项式.

对于这一类型，可以利用欧拉公式及前面的求解方法求解. 假设

<table>
<tr><td>课时
分配</td><td>教 学 内 容</td><td>方法及
手段</td></tr>
<tr><td>知识
讲解

20M</td><td>

2． $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型

当 $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 时，方程（5-27）变为

$$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x],$$

其中 λ，ω 是常实数， $P_l(x)$，$P_n(x)$ 分别为关于 x 的 l，n 次多项式.

对于这一类型，可以利用欧拉公式及前面的求解方法求解．假设

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}[A(x)\cos\omega x+B(x)\sin\omega x]$$

是方程的特解，其中 $A(x)$，$B(x)$ 是 x 的 m 次多项式， $m=\max(l,n)$， k 根据 $\lambda\pm\mathrm{i}\omega$ 不是特征根、是特征根分别取 0，1，如表 5-3 所示.

表 5-3

$\lambda\pm\mathrm{i}\omega$	k	y^*
不是特征根	0	$y^*=\mathrm{e}^{\lambda x}[A(x)\cos\omega x+B(x)\sin\omega x]$
是特征根	1	$y^*=x\mathrm{e}^{\lambda x}[A(x)\cos\omega x+B(x)\sin\omega x]$

说明　以上结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程， k 是特征方程中含根 $\lambda\pm i\omega$ 的重复次数.

例 3　求方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的通解.

解　对应的特征方程为 $r^2+1=0$，特征根 $r_{1,2}=\pm\mathrm{i}$，故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

因为 $f(x)=x\cos 2x$，所以

$\lambda=0$，$\omega=2$，$P_l(x)=x$，$P_n(x)=0$，$m=\max(l,n)=1$．又因为 $\lambda\pm\mathrm{i}\omega=\pm2\mathrm{i}$ 不是特征根，故 $k=0$，即可设

$$y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x,$$

代入原方程，整理得

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x,$$

因此得方程组

$$\begin{cases}-3a=1,\\-3b+4c=0,\\-3c=0,\\-3d-4a=0,\end{cases}$$

解得 $a=-\dfrac{1}{3}$，$b=0$，$c=0$，$d=\dfrac{4}{9}$，即原方程通解为

$$y=Y+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x.$$

例 4　求方程 $y''-3y'+2y=5\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 的通解.

解　对应的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，特征根 $r_1=2$，$r_2=1$，故对应的齐次方程的通解为

</td><td>讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法

学习二阶常系数线性非齐次微分方程的求解方法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

	$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}.$$ 因为 $f(x) = 5e^{-x}\cos x$，所以 $\lambda = -1$，$\omega = 1$，$P_l(x) = 5$，$P_n(x) = 0$，$m = \max(l, n) = 0$. 又因为 $\lambda \pm i\omega = -1 \pm i$ 不是特征根，故 $k = 0$，即可设 $$y^* = e^{-x}(a\cos x + b\sin x),$$ 代入原方程，整理得 $$(a-b)\cos x + (a+b)\sin x = \cos x,$$ 因此得方程组 $$\begin{cases} a - b = 1, \\ a + b = 0, \end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2}, \\ b = -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$ 即原方程通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + \dfrac{1}{2}e^{-x}(\cos x - \sin x)$. **【学生】掌握二阶常系数线性非齐次微分方程的求解方法**	
问题讨论 10M	**【教师】组织学生讨论以下问题** 1．在二阶常系数齐次线性微分方程的通解推导过程中，当特征方程有两个相等实根，即 $r_1 = r_2$ 时，我们取 $y_1 = e^{rx}$，$y_2 = xe^{rx}$，还可以取其他形式吗？ 2．若 $n\ (n > 2)$ 阶常系数齐次线性微分方程的特征根为 n 个相异的实根，其通解形式是什么？ **【学生】讨论、发言**	
课堂测验 10M	**【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况** **【学生】做测试题目** **【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程** **【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧**	
课堂小结 5M	**【教师】简要总结本节课的要点** 本节课学习了二阶常系数非齐次线性微分方程的相关知识及其应用，了解了伯努利方程。课后大家要多加练习，巩固认知。 **【学生】总结回顾知识点**	